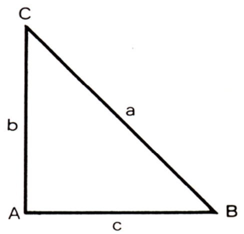
1 Resuelve los siguientes triángulos, rectángulos en A, si se conocen los datos siguientes:

a) $a = 54$ m y $B = 32° 25'$; *b)* $b = 122$ m y $c = 130$ m;
c) $b = 230$ m y $B = 62° 26'$; *d)* $c = 27$ m y $a = 35$ m;
e) $a = 62$ m y $b = 32$ m; *f)* $c = 34$ m y $B = 42° 25'$.

solución

Tendremos en cuenta las relaciones 1), 2) y 3) de la página 54 del texto.



a) $C = 90° - B = 90° - 32° 25' = 57° 35'$;
$b = a \operatorname{sen} B = 54 \cdot \operatorname{sen} 32° 25' = 28{,}95$;
$c = a \cos B = 54 \cdot \cos 32° 25' = 45{,}59$.

b) $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 178{,}28$; $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} = 0{,}9385 \Longrightarrow B = 43° 10' 58{,}3''$;
$\operatorname{tg} C = \frac{c}{b} = 1{,}0656 \Longrightarrow C = 46° 49' 8''$.

c) $C = 27° 34'$; $c = b \operatorname{cotg} B = 120{,}1$; $a = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = 259{,}45$.

d) $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 22{,}27$; $\cos B = \frac{c}{a} = \frac{27}{35} = \operatorname{sen} C \Longrightarrow B = 39° 31' 3{,}6''$;
$C = 50° 28' 56{,}4''$.

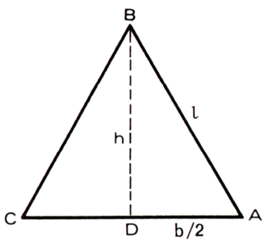
e) $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 53{,}1$; $\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} = 0{,}5161 \Longrightarrow B = 31° 4' 22{,}6''$;
$\cos C = \frac{b}{a} = 0{,}5161 \Longrightarrow C = 58° 55' 37{,}4''$.

f) $C = 90° - B = 47° 35'$; $b = \operatorname{ctg} B = 31{,}06$; $a = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = 50{,}41$.

2 Resuelve los siguientes triángulos isósceles (A y C son los ángulos iguales, b la base, l cada uno de los lados iguales y h, la altura):

a) $A = 68° 57'$ y $l = 35$ m; *b)* $l = 78$ m y $b = 102$ m;
c) $A = 27° 8' 20''$ y $b = 3{,}7$ m; *d)* $b = 14$ m y $h = 15$ m.

solución



Consideremos el triángulo rectángulo ABD (figura).

a) $\frac{1}{2} B = 90° - A \Longrightarrow B = 42° 6'$; $\frac{b}{2} = l \cos A \Longrightarrow b = 25{,}14$.

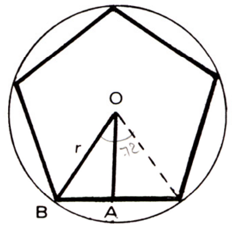
b) $\cos A = \frac{b/2}{l} = \operatorname{sen} \frac{1}{2} B = 0{,}6538 \Longrightarrow A = C = 49° 10' 4''$;
$B = 81° 39' 51{,}96''$.

c) $B = 2\,(90° - A) = 125° 43' 20''$; $l = \frac{b/2}{\cos A} = 2{,}078$.

d) $l = \sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}} = 16{,}55$; $\operatorname{tg} A = \frac{h}{b/2} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} B = \frac{15}{7} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow A = C = 64° 58' 59{,}2''$; | $B = 50° 2' 1{,}6''$.

3 Calcula el lado de un pentágono regular, inscrito en una circunferencia, cuyo diámetro es 30 cm.

solución



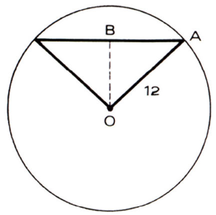
Resolvemos el triángulo OBA (figura):

$\text{áng} \frac{1}{2} O = 36°$; $r = 15$.

$d(B, A) = \frac{1}{2} l = r \cdot \operatorname{sen} 36° \Longrightarrow l = 17{,}63$.

4 En una circunferencia de 12 cm de radio se toma una cuerda de 13 cm. Averigua el ángulo central que abarca dicha cuerda.

solución



En el triángulo rectángulo OAB (figura), $d(O, A) = 12$;

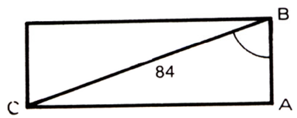
$d(A, B) = \frac{13}{2}$.

Se tiene:

$\operatorname{sen} \frac{1}{2} O = \frac{13/2}{12} = \frac{13}{24} \Longrightarrow O = 65° 35' 39{,}6''$.

5 Calcula la base y la altura de un rectángulo, sabiendo que su diagonal mide 84 cm y que la amplitud de uno de los ángulos adyacentes a ella es 72° 48′.

solución



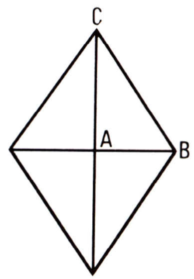
En el triángulo rectángulo ABC, $d(C, B) = 84$; $B = 72° 84'$.

Se tiene, pues: *base:* $d(A, C) = 84 \cdot \operatorname{sen} 72° 84' = 80{,}24$;
altura: $d(A, B) = 84 \cdot \cos B = 24{,}84$.

6 Calcula los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 13 cm y 9 cm.

solución

Consideremos el triángulo rectángulo ABC formado al trazar las diagonales que se cortan en el punto medio, A:



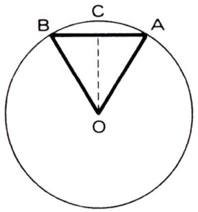
$AC = \frac{13}{2}$; $AB = \frac{9}{2}$.

$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{13} \Longrightarrow C = 69° 23' 25{,}1''$;

$\operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \frac{AC}{AB} = \frac{13}{9} \Longrightarrow B = 110° 36' 34{,}9''$.

7 Si una cuerda de longitud 4 m subtiende un arco de 45° 37′, ¿cuál es el radio de la circunferencia?

solución



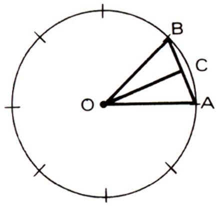
El triángulo OAC rectángulo tiene:

$AC = \frac{4}{2} = 2;\quad \frac{1}{2}O = \frac{45°\,37'}{2}.$

Radio: $OA = \frac{AC}{\text{sen}\,\frac{1}{2}O} = \frac{2}{0{,}3876} = 5{,}16.$

8 La longitud del lado de un octágono regular es 12 m. Halla los radios de la circunferencia inscrita y circunscrita.

solución



AB es el lado del octógono.

El triángulo AOC es rectángulo: $\frac{1}{2}O = \frac{45°}{2};\quad AC = 6.$

Radio de la circunferencia *inscrita:*

$OC = \frac{AC}{\text{tg}\,\frac{1}{2}O} = \frac{6}{0{,}4142} = 14{,}49.$

Radio de la circunferencia *circunscrita:*

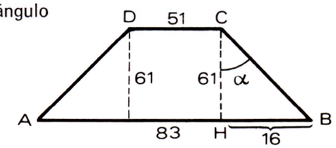
$OA = \frac{AC}{\text{sen}\,\frac{1}{2}O} = \frac{6}{0{,}3827} = 15{,}68.$

9 Halla los ángulos de un trapecio isósceles cuyas bases miden 83 m y 51 m y cuya altura mide 61 m.

solución

Trazando la altura, se nos forma el triángulo rectángulo BCH: $HB = 16$; $CH = 61$.

Luego se tiene:



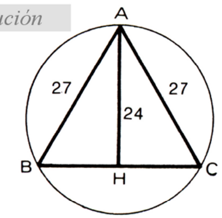
$\text{tg}\,B = \frac{61}{16} \Longrightarrow B = A = 75°\,18'\,9{,}7''.$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{16}{61} \Longrightarrow \alpha = 14°\,41'\,50{,}3'' \Longrightarrow C = D = 90° + \alpha = 104°\,41'\,50{,}3''.$

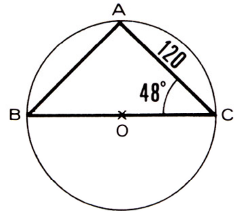
10 Calcula el radio de la circunferencia circunscrita a cada uno de los triángulos siguientes, en los que se conocen:

a) $b = c = 27$ m y $h_a = 24$ m; *b)* $b = 120$ m, $A = 90°$ y $C = 48°$.

solución



a) El triángulo ABC es isósceles $\Longrightarrow$ el triángulo AHC es rectángulo.



Teniendo en cuenta [4.2] de la pág. 57 del texto, resulta:

$\frac{27}{\text{sen}\,C} = 2r \Longrightarrow r = \frac{27}{2\,\text{sen}\,C} = \frac{27}{2\cdot\frac{24}{27}} = 15{,}19.$

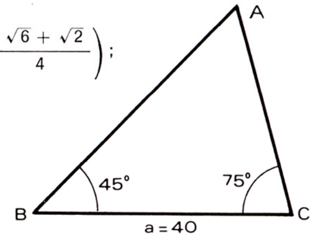
b) $BC = 2r = \frac{120}{\cos 48°} \Longrightarrow r = 89{,}67.$

11 Resuelve, sin emplear tablas trigonométricas, los triángulos en los que se conocen estos datos:

a) $a = 40$ cm, $B = 45°$ y $C = 75°$; *b)* $b = 8$ dm, $A = 15°$ y $B = 30°$;

c) $A = 90°$, $B = 30°$ y $a = 26$ cm.

solución

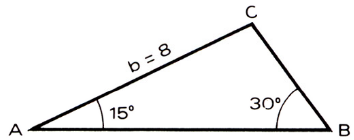


a) $A = 180 - (B+C) = 60°\ \left(\text{sen}\,75° = \text{sen}\,(45°+30°) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right);$

$\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{b}{\text{sen}\,B} = \frac{c}{\text{sen}\,C} \Longrightarrow b = a\,\frac{\text{sen}\,B}{\text{sen}\,A} = \frac{40\sqrt{6}}{3};$

$c = \frac{a\,\text{sen}\,C}{\text{sen}\,A} = \frac{20\,(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{3}.$

b) $C = 180° - (A+B) = 135°\ \left(\text{sen}\,15° = \text{sen}\,(45°-30°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right);$



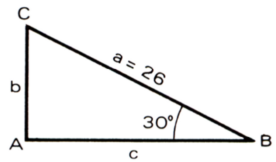
$\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{b}{\text{sen}\,B} = \frac{c}{\text{sen}\,C} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow a = b\cdot\frac{\text{sen}\,A}{\text{sen}\,B} = 4(\sqrt{6}-\sqrt{2});$

$c = b\,\frac{\text{sen}\,C}{\text{sen}\,B} = 8\sqrt{2}.$

c) $C = 90° - B = 60°$; $b = a\,\text{sen}\,B = 13$;

$c = a\cos B = 13\sqrt{3}.$



12 El radio de una circunferencia mide 25 m. Calcula el ángulo que forman las tangentes a dicha circunferencia, trazadas por los extremos de una cuerda de longitud 36 m.

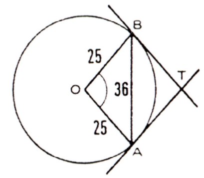
solución

En el triángulo ABO se tiene: $36^2 = 25^2 + 25^2 - 2\cdot 25\cdot 25\cos O \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \cos O = 0{,}0368 \Longrightarrow O = 92°\,6'\,32{,}3''.$

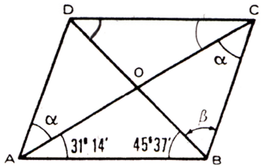
En el cuadrilátero $AOBT$, los ángulos A y B son rectos;

luego $O + T = 180° \Longrightarrow T = 180° - 92°\,6'\,32{,}3'' = 107°\,53'\,27{,}7''.$



13 Un lado de un paralelogramo mide 56 cm y los ángulos formados por este lado y las diagonales miden 31° 14′ y 45° 37′. Calcula los lados del paralelogramo.

solución



En el triángulo AOB se tiene:

Áng $AOB = 180° - (31° 14' + 45° 37') = 103° 9'$;

$$\frac{56}{\text{sen } 103° 9'} = \frac{OA}{\text{sen } 45° 37'} \Longrightarrow OA = 41{,}10.$$

En el triángulo ACB se tiene:

$AC = 2 \cdot OA = 82{,}20$; $AB = 56$; áng $BAC = 31° 14'$.

Luego: $CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos BAC \Longrightarrow CB = 44{,}95$.

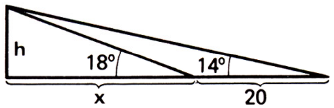
Los lados del paralelogramo miden: $44{,}95 = CB = DA$; $56 = AB = DC$.

14 Halla la altura de un poste, sabiendo que desde cierto punto del suelo se ve bajo un ángulo de 14°, y si nos acercamos 20 m al pie del poste lo vemos bajo un ángulo de 18°.

solución

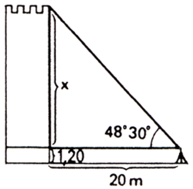
$$\left.\begin{aligned} h &= (20+x) \text{ tg } 14° = 0{,}25\ (20+x) \\ h &= x \text{ tg } 18° = 0{,}325\ x \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = 61{,}25.$$

$h = 19{,}90$.



15 Calcula la altura de una torre situada en un terreno horizontal, sabiendo que con un aparato de 1,20 m de altura, colocado a 20 m de ella, se ha medido el ángulo que forma con la horizontal la visual dirigida al punto más elevado, y se ha obtenido que mide 48° 30′.

solución



Se tiene: $x = 20 \cdot \text{tg } 48° 30' = 22{,}61$ m.

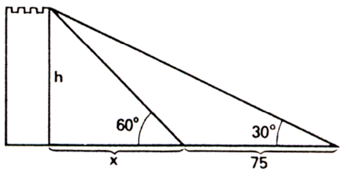
Altura: $x + 1{,}20 = 23{,}81$ m.

16 Desde cierto lugar del suelo se ve el punto más alto de una torre, formando la visual un ángulo de 30° con la horizontal. Si nos acercamos 75 m hacia el pie de la torre, ese ángulo se hace de 60°. Calcula la altura de la torre.

solución

$$\left.\begin{aligned} h &= (75+x) \text{ tg } 30° = (75+x)\frac{\sqrt{3}}{3} \\ h &= x \text{ tg } 60° = \sqrt{3}\, x \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{75}{2} \text{ m} \Longrightarrow h = \frac{75\sqrt{3}}{2} \text{ m}.$$



17 Resuelve los triángulos en los que se conocen estos datos (la longitud de los lados se expresa en metros):

a) $a = 25$, $B = 36° 30'$ y $C = 58° 45'$; *b)* $b = 40$, $c = 45$ y $A = 62° 9'$;

c) $a = 12$, $B = 32°$ y $C = 124°$; *d)* $a = 90$, $b = 102$ y $A = 61° 18'$;

e) $b = 0{,}24$, $A = 26° 10' 45''$ y $C = 44° 25'$; *f)* $b = 45$, $c = 50$ y $B = 40° 32'$;

g) $c = 0{,}94$, $A = 15° 34'$ y $C = 123° 29'$; *h)* $a = 12$, $b = 20$ y $c = 15$;

solución

a) $A = 180° - (B+C) = 84° 45'$; $\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} = \dfrac{c}{\text{sen } C} \Longrightarrow b = \dfrac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A} = 14{,}93$;

$c = \dfrac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A} = 21{,}46$.

b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Longrightarrow a = 44{,}08$;

$\text{sen } B = \dfrac{b \text{ sen } A}{a} = 0{,}8024 \Longrightarrow B = 53° 21' 35{,}64''$;

$\text{sen } C = \dfrac{c \text{ sen } A}{a} = 0{,}9026 \Longrightarrow C = 64° 30' 20''$.

c) $A = 180° - (C+B) = 24°$; $b = \dfrac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A} = 15{,}64$; $c = \dfrac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A} = 24{,}46$.

d) $\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} \Longrightarrow \text{sen } B = 0{,}9941 \Longrightarrow B = 83° 46' 21''$;

$C = 180° - (A+B) = 34° 55' 39''$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Longrightarrow c = 58{,}75$.

e) $B = 180° - (A+C) = 109° 24' 15''$; $a = \dfrac{b \text{ sen } A}{\text{sen } B} = 0{,}112$; $c = \dfrac{b \text{ sen } C}{\text{sen } B} = 0{,}178$.

f) $\dfrac{b}{\text{sen } B} = \dfrac{c}{\text{sen } C} \Longrightarrow \text{sen } C = 0{,}7221 \Longrightarrow C = 46° 13' 41{,}4''$;

$A = 180° - (B+C) = 93° 14' 18{,}6''$; $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Longrightarrow a = 69{,}13$.

g) $B = 180° - (A+C) = 40° 57'$; $b = \dfrac{c \text{ sen } B}{\text{sen } C} = 0{,}739$; $a = \dfrac{c \text{ sen } A}{\text{sen } C} = 0{,}302$.

h) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Longrightarrow \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0{,}8017 \Longrightarrow A = 36° 42' 37{,}6''$;

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Longrightarrow \cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = -0{,}086 \Longrightarrow B = 94° 56' 23{,}72''$

$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 0{,}6646 \Longrightarrow C = 48° 20' 58{,}7''$.