

MATEMÁTICAS

Cuaderno de
recuperación

4º ESO

Opción A

Nombre: _____

Grupo: _____

Año académico: _____

Temario

1. Números racionales
2. Números reales
3. Problemas aritméticos
4. Proporciones y porcentajes
5. Expresiones algebraicas
6. Ecuaciones e inecuaciones
7. Sistemas de ecuaciones
8. Funciones elementales
9. Semejanza
10. Geometría analítica
11. Estadística
12. Probabilidad

Números

Halla el valor de x para que las siguientes fracciones sean equivalentes.

a) $\frac{15}{3} = \frac{x}{4}$

b) $\frac{2}{x} = \frac{8}{20}$

Expresa estas fracciones con el mismo denominador.

a) $\frac{3}{5}$, $\frac{11}{15}$ y $\frac{13}{20}$

b) $\frac{7}{9}$, $\frac{3}{12}$ y $\frac{6}{18}$

Realiza y simplifica estas operaciones.

a) $\frac{3}{4} - \frac{5}{12} + \frac{7}{8}$

b) $\frac{7}{3} - \frac{2}{10} + \frac{3}{5}$

c) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} : \frac{2}{3}$

d) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{2}$

Efectúa estas operaciones.

a) $1 - \frac{5}{3} + \frac{2}{7}$

b) $-\frac{2}{5} + \frac{4}{3} - 3$

c) $8 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{-3}{4}$

d) $\frac{3}{2} : \frac{7}{6} \cdot 9$

Calcula y simplifica el resultado.

a) $\frac{3}{2} + \frac{1}{5} : \frac{4}{15}$

b) $-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}$

Realiza las siguientes operaciones.

a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{2} + \frac{5}{6} \cdot \left(1 - \frac{7}{2}\right)$

b) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{6} - \frac{5}{2}\right) : 3$

c) $3 - \frac{1}{2} \cdot 4 : \left(\frac{3}{5} - 1\right) + 1$

Utiliza el método de Tales para representar en una recta estos números racionales.

a) $\frac{3}{5}$

b) $-\frac{1}{3}$

c) $\frac{12}{5}$

d) $\frac{9}{7}$

Escribe cada número fraccionario en forma decimal. Indica qué tipo de decimal es cada uno y, si existen, la parte entera, el anteperíodo y el período.

a) $\frac{12}{9}$

b) $\frac{7}{15}$

c) $\frac{17}{6}$

d) $\frac{5}{7}$

Sin hacer la división, explica qué tipo de expresión decimal corresponde a cada fracción.

a) $\frac{126}{12}$

b) $\frac{59}{22}$

c) $\frac{29}{27}$

d) $\frac{177}{45}$

Escribe en forma fraccionaria los números.

a) 3,5

c) -3,55...

e) 5,255...

g) 1,11...

b) 0,66...

d) 2,1515...

f) 0,7575...

h) 6,2525...

Clasifica los siguientes números en racionales o irracionales.

a) $\frac{3}{5}$

c) $\sqrt{7}$

e) 632

b) 0,75

d) -4

f) 0,14 144 1114...

Representa los siguientes números irracionales.

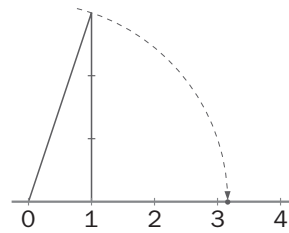
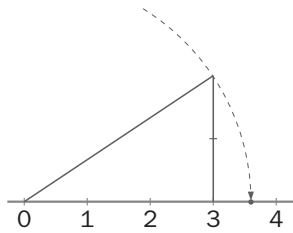
a) $\sqrt{5}$

b) $\sqrt{8}$

c) $\sqrt{26}$

d) $\sqrt{40}$

Escribe los números representados en cada figura.



Dibuja en la recta real cada uno de estos intervalos.

a) $(2, 3)$

b) $[2, 3)$

c) $(2, 3]$

d) $[2, 3]$

Dibuja en la recta real estas semirrectas.

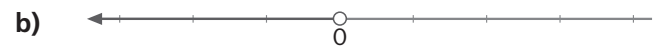
a) $(1, \infty)$

b) $[1, \infty)$

c) $(-\infty, 3]$

d) $(-\infty, -3]$

Indica el intervalo que representa cada dibujo.



Dibuja en la recta real las semirrectas determinadas por las relaciones $|x| > 3$ y $|x| \geq 3$.

$|x| > 3 \Rightarrow x > 3$ y $x < -3 \Rightarrow (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

Efectúa esta operación.

$$\left[3 - \frac{4}{5} : \left(1 - \frac{3}{4} \right) + 2 \right] \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{5} : 3 - \frac{1}{4}$$

En mi cumpleaños, he partido la tarta en 6 trozos iguales, pero un amigo me dice que le dé $\frac{14}{42}$ de la tarta. ¿Cuántas porciones de la tarta le tengo que dar? ¿Por qué?

Indica, sin realizar la división, qué tipo de expresión decimal tiene cada fracción.

a) $\frac{1}{125}$

c) $\frac{11}{35}$

b) $\frac{43}{21}$

d) $\frac{2}{7}$

Escribe en forma fraccionaria los siguientes números decimales.

a) 45,777...

c) 3,4222...

b) 1,2323...

d) 0,53636...

Realiza las siguientes operaciones, expresando los decimales previamente en forma de fracción.

a) $0,4\widehat{6} - \frac{2}{5} + 3,4$

b) $\frac{1}{3} \cdot 2,4 - \frac{3}{5}$

Efectúa estas operaciones con una aproximación de tres cifras decimales, por exceso y por defecto.

a) $\sqrt{7} + 2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{12}$

Representa cada uno de estos números irracionales en una recta.

a) $\sqrt{12}$

c) $\sqrt{21}$

b) 5,42422...

d) 3,01001...

Dibuja en una recta estos intervalos y semirrectas.

a) $[-3, 3)$

c) $(-\infty, -4]$

b) $[-3, +\infty)$

d) $(2, 4)$

Potencias y raíces

Escribe como potencias positivas las negativas, y viceversa.

a) 8^{-3}

b) $\frac{1}{6^{-4}}$

c) 5^2

d) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}$

Expresa estas potencias como potencias únicas y calcula las operaciones.

a) $2^3 \cdot 2^5$

c) $6^2 : 6^{-4}$

b) $6^{-3} \cdot 6^{-3}$

d) $10^2 : 10^4$

Expresa en forma de potencia única estas potencias y obtén el resultado.

a) $2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 7^{-2}$

c) $35^3 : 5^3 \cdot 7^{-3}$

b) $3^4 \cdot 6^4 : 18^{-3}$

d) $8^2 : 2^2 : 4^{-2}$

Escribe las siguientes potencias como potencias únicas y calcula el resultado.

a) $(3^{-3})^2$

c) $(2^{-2})^4$

b) $(2^2)^{-3}$

d) $(5^{-3})^{-2}$

Escribe en notación científica estos números.

a) 1 200 000

c) 0,00000045

b) 3 230 000 000

d) 0,00000000132

Realiza estas operaciones y expresa el resultado en notación científica.

a) $8,05 \cdot 10^7 + 3,16 \cdot 10^7$

b) $3,13 \cdot 10^8 - 1,66 \cdot 10^7$

Indica el número de raíces de estos radicales.

a) $\sqrt{8}$

b) $\sqrt[3]{32}$

c) $\sqrt[5]{-12}$

d) $\sqrt{-4}$

Escribe tres radicales equivalentes en cada caso.

a) $\sqrt[4]{3}$

b) $\sqrt[5]{2^3}$

Comprueba si los radicales son equivalentes.

a) $\sqrt[5]{11^2}$ y $\sqrt[10]{11^6}$

b) $\sqrt[3]{13^2}$ y $\sqrt[12]{13^8}$

Expresa los siguientes pares de radicales con el mismo índice.

a) $\sqrt{11}$ y $\sqrt[3]{7^2}$

b) $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt[6]{25}$

Escribe en forma radical estas potencias.

a) $3^{\frac{4}{3}}$

b) $5^{\frac{7}{2}}$

c) $7^{\frac{2}{5}}$

d) $3^{\frac{1}{5}}$

Expresa estas raíces en forma potencial.

a) $\sqrt[3]{27}$

b) $\sqrt[8]{64}$

c) $\sqrt[3]{-125}$

d) $\sqrt[4]{1000}$

Calcula las raíces expresándolas como exponente fraccionario.

a) $\sqrt[3]{7^9}$

b) $\sqrt[3]{10^{12}}$

c) $\sqrt{13^4}$

d) $\sqrt[4]{15^8}$

Indica qué pares de potencias son iguales.

a) $17^{\frac{2}{5}}$ y $17^{\frac{4}{10}}$

c) $11^{\frac{2}{4}}$ y $11^{\frac{15}{30}}$

b) $29^{\frac{5}{8}}$ y $29^{\frac{3}{4}}$

d) $37^{\frac{1}{3}}$ y $37^{0,666\dots}$

Calcula cada raíz después de factorizar.

a) $\sqrt{144}$

c) $\sqrt{255}$

b) $\sqrt[3]{0,027}$

d) $\sqrt[3]{-0,008}$

Realiza estas operaciones.

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{5} \cdot (\sqrt{2})^3$

b) $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{4} : \sqrt[5]{2}$

d) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{6}}$

Introduce en el radical los números que están fuera.

a) $3\sqrt{3}$

c) $11\sqrt{7}$

b) $7\sqrt[3]{2}$

d) $4\sqrt[3]{4}$

Efectúa estas sumas de radicales.

a) $3\sqrt{18} - 5\sqrt{32} + 6\sqrt{50}$

b) $12\sqrt[3]{81} - 6\sqrt[3]{24}$

Potencias de exponente entero

Calcula estas potencias.

a) $(-2)^3$

c) -3^{-2}

b) 1^{23}

d) 467^0

Expresa como una potencia de 2 cada número.

a) 1024

c) $\frac{1}{64}$

b) 4^{17}

d) $4 \cdot 8^3$

Escribe como potencias positivas, las negativas, y viceversa.

a) 4^{-3}

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^2$

c) 3^2

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

Expresa estas operaciones como una sola potencia positiva.

a) $2^3 \cdot 2^6$

d) $7^9 : 7^{-2}$

b) $3^{-2} \cdot 3^5$

e) $4^2 \cdot 4^9 : 4^5$

c) $(7^4)^{-3}$

f) $9^2 \cdot 3^3$

Calcula el resultado expresándolo en forma de potencia positiva.

a) $\frac{16 \cdot 2^{-3}}{4^2}$

c) $(5^3 \cdot 2^3)^2$

b) $2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 5^{-2}$

d) $27^3 : 3^7 : 9^{-1}$

Potencias de 10. Notación científica

Escribe en notación científica estos números.

a) $234,9 \cdot 10^4$

c) 23 millones

b) $\frac{3}{10^3}$

d) 0,0000245

Realiza estas operaciones y expresa el resultado en notación científica.

a) $4,02 \cdot 10^4 + 5,1 \cdot 10^4$

c) $3,11 \cdot 10^3 - 2,2 \cdot 10^3$

b) $(3 \cdot 10^5) \cdot (2 \cdot 10^4)$

d) $(7 \cdot 10^8) : (4 \cdot 10^{-3})$

a) $4,02 \cdot 10^4 + 5,1 \cdot 10^4 = 9,12 \cdot 10^4$

c) $3,11 \cdot 10^3 - 2,2 \cdot 10^3 = 9,1 \cdot 10^2$

Una persona duerme, por término medio, ocho horas diarias. Expresa en notación científica los segundos que ha dormido, en toda su vida, una persona de ochenta años.

Radicales. Potencias de exponente fraccionario

Calcula cada raíz con una aproximación de una cifra decimal, por exceso y por defecto.

a) $\sqrt[3]{35}$

b) $\sqrt[4]{300}$

Indica el número de raíces de estos radicales.

a) $\sqrt[5]{243}$

c) $\sqrt[4]{-16}$

b) $\sqrt[3]{-125}$

d) $\sqrt{64}$

Calcula estas raíces.

a) $\sqrt[4]{3^8}$

c) $\sqrt{2^{12}}$

b) $\sqrt[3]{7^9}$

d) $\sqrt[5]{3^{20}}$

Comprueba si los siguientes radicales son equivalentes.

a) $\sqrt[3]{4}$ y $\sqrt[6]{2^4}$

c) $\sqrt{7^{-1}}$ y $\sqrt[4]{-49}$

b) $\sqrt[5]{5}$ y $\sqrt[7]{7}$

d) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$ y $\frac{2}{5}$

Expresa los siguientes radicales con el mismo índice.

a) $\sqrt[4]{3}$ y $\sqrt[8]{5}$

c) $\sqrt{2^3}$ y $\sqrt[5]{5}$

b) $\sqrt{5}$ y $\sqrt[7]{2^3}$

d) $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[4]{7}$

Escribe estas potencias de exponente fraccionario como radicales.

a) $2^{\frac{5}{3}}$

c) $3^{\frac{-3}{2}}$

b) $36^{\frac{3}{2}}$

d) $4^{\frac{-2}{7}}$

Expresa los siguientes radicales en forma de potencia con exponente fraccionario.

a) $\sqrt[4]{7^5}$

b) $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$

c) $\sqrt[3]{-81}$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

a) $\sqrt[4]{7^5} = 7^{\frac{5}{4}}$

b) $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 2^{\frac{-3}{5}}$

c) $\sqrt[3]{-81} = -3^{\frac{4}{3}}$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{-1}{3}}$

Calcula estas raíces expresándolas primero como potencias de exponente fraccionario.

a) $\sqrt[5]{8^{10}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{4^3}}$

c) $\sqrt[8]{2^{16}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{10^6}}$

Cálculo con potencias y raíces

Realiza estas operaciones.

a) $\sqrt{216} : \sqrt{6}$

b) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}$

c) $\sqrt[3]{729} : \sqrt[3]{27}$

d) $(\sqrt[4]{16})^2$

Efectúa las siguientes operaciones.

a) $(3 \cdot \sqrt{2})^2$

b) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{8}}$

c) $(\sqrt{5} \cdot \sqrt{3})^4$

d) $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^4$

Factoriza los radicandos para obtener cada raíz.

a) $\sqrt{129\,600}$

b) $\sqrt[6]{15\,625}$

c) $\sqrt[3]{9\,261}$

d) $\sqrt[5]{537\,824}$

Expresa cada número como un radical.

a) $5\sqrt{5}$

b) $7\sqrt{7^3}$

c) $3\sqrt[4]{2}$

d) $2^2 \cdot \sqrt[3]{2}$

Realiza las sumas de radicales.

a) $\sqrt{32} - \sqrt{2}$

b) $\sqrt{50} - 2\sqrt{20}$

c) $5\sqrt{18} - \sqrt{8} + 2\sqrt{72}$

d) $3 \cdot \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{375}$

Calcula el valor de estas potencias.

a) $8^{\frac{1}{3}}$

b) $32^{\frac{-1}{5}}$

c) $81^{\frac{3}{4}}$

d) $0^{\frac{7}{4}}$

Escribe estas expresiones en forma de potencia, pero con un solo exponente.

a) $(2^{\frac{1}{3}})^4$

b) $(\sqrt[3]{5})^4$

c) $(25^{\frac{-1}{2}})^{-2}$

d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$

Efectúa las operaciones.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3}$

c) $\sqrt[5]{2} : \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[10]{2^7}$

b) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3^3} : \sqrt[6]{3^4}$

d) $\sqrt{\sqrt{5}} \cdot (\sqrt{3})^2$

Escribe en forma de potencia estas expresiones.

a) $3^x \cdot 5^x \cdot 6^x$

b) $\frac{x}{\sqrt{x}}$

c) $(\sqrt[3]{x})^2$

d) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}$

Realiza las siguientes operaciones.

a) $\sqrt[3]{5} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{4}}$

c) $5^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{7^4}$

b) $(3^2)^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}$

d) $7^{\frac{1}{5}} \cdot (6^{\frac{2}{10}} \cdot \sqrt[1/2]{8})$

Potencias de exponente entero y fraccionario

Aplicando las propiedades de las potencias, simplifica estas expresiones.

a) $\frac{5^2 \cdot (5^{-2})^3 \cdot 5^4}{5^0 \cdot 5^{-5} \cdot (5^2)^2}$

c) $\frac{2^{-1} \cdot (2^5)^{-3} \cdot 2}{2^7}$

b) $\frac{3^{\frac{2}{3}} \cdot (3^2)^{\frac{3}{2}}}{3^3}$

d) $\frac{7^{-3} \cdot 7^{-1} \cdot 7^4}{(7^5 \cdot 7)^2}$

Calcula el valor de x en cada igualdad.

a) $x^2 = \frac{121}{81}$

c) $x^{-2} = \frac{1}{4}$

b) $x^4 = 16 \cdot 9^2$

d) $3^5 \cdot 3^x = 3^{15}$

Opera y expresa el resultado como una potencia.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 : \left(\frac{5}{3}\right)^3$

b) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 3^3$

Realiza estas operaciones y expresa el resultado en forma de raíz.

a) $\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{3}{5}} : \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$

Notación científica

Escribe en notación científica los siguientes números.

a) 7 millonésimas

c) Dos millones y medio

b) 32 397 258

d) 0,000 325

Calcula y expresa el resultado en notación científica.

a) $8,4 \cdot 10^3 + 9,23 \cdot 10^4$

b) $6,3 \cdot 10^{-1} - 2,1 \cdot 10^{-2}$

c) $(4 \cdot 10^{-5}) \cdot (7 \cdot 10^{-2})$

d) $(2 \cdot 10^6) : (5 \cdot 10^{-9})$

Cálculo con potencias y raíces

Introduce dentro de la raíz los números que aparecen fuera de ella.

a) $5 \cdot \sqrt{3}$

b) $3 \cdot \sqrt[3]{2}$

c) $2 \cdot \sqrt[4]{5}$

d) $4 \cdot \sqrt{7}$

Simplifica las expresiones.

a) $3 \cdot \sqrt{5} + 3\sqrt{20}$

b) $\sqrt{27} - 3 \cdot \sqrt{12}$

c) $\sqrt{45} + 2 \cdot \sqrt{20} - \sqrt{80}$

d) $\sqrt{8} + 4\sqrt{18} - \sqrt{50}$

Efectúa estas operaciones.

a) $(2\sqrt{3}) \cdot (3\sqrt{2})$

b) $\sqrt{125} : (3\sqrt{5})$

c) $(3\sqrt{6}) \cdot \sqrt{6}$

d) $(5\sqrt{18}) : \sqrt{50}$

Expresa los siguientes radicales con el mismo índice.

a) $\sqrt{2}$ y $\sqrt[4]{3}$

b) $\sqrt{5}$ y $\sqrt[4]{3^3}$

c) $\sqrt[3]{2^2}$ y $\sqrt{7}$

d) $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt[4]{6}$

Proporcionalidad. Porcentajes.

Reparte 450 de forma directamente proporcional a 25, 50 y 75.

Reparte 10.650 en proporción directa a 3, 5 y 7.

Un padre quiere repartir 140 sellos entre sus dos hijos de forma directamente proporcional a sus edades, que son 13 y 15 años.

¿Cuántos sellos recibirá cada uno?

Una máquina, *A*, fabrica 280 tornillos y salen 14 defectuosos. Otra máquina, *B*, fabrica 275 tornillos y salen 11 defectuosos.

a) ¿Cuál es el porcentaje de tornillos defectuosos fabricados por cada máquina?

b) ¿Cuál de las dos máquinas trabaja mejor?

Un análisis realizado en una granja a 7200 animales ha permitido detectar un 24 % de animales enfermos. Se emplea como tratamiento una dosis de vitamina *A* en 2 de cada 3 animales.

¿Cuántas dosis de vitamina *A* se necesitan?

Aumenta las siguientes cantidades en los porcentajes que se indican.

a) 134 en un 8 %.

c) 45,76 en un 12 %.

b) 4563 en un 17,3 %.

d) 896,32 en un 0,4 %.

Disminuye las siguientes cantidades en los porcentajes que se indican.

- a) 54 en un 5 %.
- b) 762 en un 9,6 %.
- c) 98,7 en un 79 %.
- d) 2 369,83 en un 0,68 %.

La cantidad de 12500 se incrementa primero en un 12 % y el resultado se vuelve a incrementar en otro 4 %. ¿Cuál es la cantidad final resultante?

El precio de una bicicleta es 175 euros. En rebajas hacen un descuento del 25 %, pero además, hay que pagar el 16 % de IVA.

¿Cuánto cuesta entonces?

¿Es lo mismo rebajar primero un artículo un 3 % y luego encarecerlo un 4 % que encarecerlo primero un 4 % y luego rebajarlo un 3 %?

Los productos de cierta empresa subieron un 10 % en 2002 y un 12 % en 2003, y bajaron un 4 % en 2004. ¿Cuál fue el porcentaje de variación de los precios en esos tres años?

La constante de proporcionalidad de dos magnitudes inversamente proporcionales es 18. Escribe cuatro parejas de cantidades que cumplan esa condición.

Con un depósito de agua se llenan 36 jarras. ¿Cuántas jarras se podrán servir si solo se llenan hasta tres cuartos de su capacidad?

Para abonar un campo de cultivo se han necesitado 42 300 kilogramos de un cierto abono que contiene un 25 % de nitratos.

¿Cuántos kilogramos se necesitarían de otro tipo de abono que contiene un 36 % de nitratos, para que el campo recibiese la misma cantidad de nitratos?

Reparte 93 en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 5.

Reparte 168 de modo inversamente proporcional a 3, 5 y 6.

Al repartir 60 de forma inversamente proporcional a los números 2 y x , se sabe que la parte correspondiente a 2 es 36. Halla x .

Se sabe que de 15 gramos de remolacha se extraen 2 de azúcar. ¿Cuánta remolacha hay que adquirir para obtener 2376 kilogramos de azúcar?

Por un grifo salen 38 litros de agua en 5 minutos. ¿Cuántos litros salen en una hora y cuarto?

María, Nuria y Paloma han cobrado por un trabajo 344 euros. María ha trabajado 7 horas; Nuria, 5 horas y Paloma, 4 horas. ¿Qué cantidad le corresponde a cada una?

Calcula el tanto por ciento de café que hay en una mezcla de 4 litros de café y 7 litros de agua.

Luis prepara una limonada con 12 litros de agua y 8 litros de zumo de limón. ¿Cuál es el porcentaje de zumo de limón que hay en la limonada?

Un teléfono móvil cuesta 85 euros. Halla su nuevo precio si:

- a) Se rebaja un 6 %.
- b) Se encarece un 4 %.

La subida salarial de una empresa en los últimos tres años ha sido del 3 %, 2 % y 4 %.

- a) ¿Cuánto cobra actualmente un empleado que cobraba hace tres años 1600 euros?
- b) ¿En qué porcentaje se ha incrementado su sueldo después de tres subidas?

El precio de un litro de combustible experimentó diversas variaciones. En enero costaba 0,95 euros y en febrero bajó su precio un 8 %. En marzo subió un 3 % y en abril subió un 2 %.

- a) ¿Qué porcentaje ha variado su precio en total?
- b) ¿Cuál es su precio en abril?

El Club del Libro tiene 100 socios y cada año aumenta su número en un 10 %.

a) ¿Cuántos socios tiene al cabo de 5 años?

b) Al cabo de 10 años, ¿consigue duplicar el número inicial de socios?

Proporcionalidad inversa. Repartos

Di cuáles de las siguientes magnitudes son inversamente proporcionales.

a) Tiempo que se tarda en limpiar un monte y número de personas que realizan la limpieza.

b) Espacio recorrido por un móvil y tiempo empleado para recorrer dicho espacio.

c) Tiempo que tarda en hacer un recorrido un avión y su velocidad.

Comprueba si la tabla representa cantidades de dos magnitudes inversamente proporcionales. En caso afirmativo, halla la constante de proporcionalidad y completa la tabla.

<i>M</i>	2	4	8	100
<i>M'</i>	5	2,5	1,25	...

El agua de un depósito se puede extraer en 200 veces con un bidón de 15 litros. Calcula cuántas veces se extraería con un bidón de 25 litros.

Realizamos un trabajo en 2 meses entre 12 personas. Necesitamos hacerlo solo en 18 días. ¿Cuántas personas debemos contratar?

Tres niños se comen un pastel en 16 minutos. ¿En cuánto tiempo se lo comerían cuatro niños?

Reparte 7875 en partes inversamente proporcionales a 3, 5 y 6.

Reparte 578 en partes inversamente proporcionales a 4, 4 y 18.

Una ganadera tiene pienso para alimentar 320 vacas durante 45 días. Pero debe dar de comer a los animales durante 60 días, por lo que decide vender a las que no puede alimentar. ¿Cuántas vacas debe vender?

El número de vueltas que dan dos ruedas dentadas es inversamente proporcional al número de dientes de cada rueda.

Una rueda dentada tiene 24 dientes y engrana otra rueda que tiene 5 dientes.

¿Cuántas vueltas dará la primera mientras la segunda da 120 vueltas?

En una Olimpiada Europea de Matemáticas se conceden tres premios inversamente proporcionales a los tiempos empleados en la resolución de los ejercicios. Los tiempos de los tres primeros concursantes han sido 3, 5 y 6 horas.

Calcula cuánto dinero recibe cada uno si hay 42 000 euros para repartir.

Proporcionalidad compuesta

Una casa de acogida necesita 5 400 euros para alojar y dar de comer a 40 personas durante 15 días.

¿Cuánto necesitará para alojar y alimentar a 50 personas durante 10 días?

Si 18 camiones transportan 1 200 contenedores en 12 días, ¿cuántos días necesitarán 24 camiones para mover 1 600 contenedores?

En un centro escolar, de los 210 alumnos de 3.º de ESO se inscriben en una actividad extraescolar 170. Mientras que de los 160 alumnos de 4.º de ESO se apuntan 130.

¿Qué curso, 3.º o 4.º, ha mostrado más interés por la actividad?

Una fiesta de disfraces tiene una relación chicos-chicas de 5 a 3. Llegan 3 chicas más y la relación pasa a ser de 10 a 7.

¿Cuántas personas hay en la fiesta?

Dos empresas alquilan un almacén por 3 500 euros. La primera guarda 40 contenedores y la segunda 300 sacos.

¿Cuánto tendría que pagar cada una si un contenedor ocupa lo mismo que 10 sacos?

Entre tres pintores han pintado la fachada de un edificio, y han cobrado 4 160 euros. El primero ha trabajado 15 días, el segundo 12 días, y el tercero 25 días.

¿Cuánto dinero tiene que recibir cada uno?

Los ingredientes de una receta para un postre casero son: 1 vaso de mantequilla; 3 huevos; 1,5 vasos de azúcar; 2 vasos de harina.

Si solo tenemos 2 huevos, ¿cómo debemos modificar los restantes ingredientes de la receta para poder hacer el postre?

Dos empresas aceptan realizar un trabajo en colaboración cobrando entre las dos 3 000 euros. Una, con tres personas, trabajó 5 días. La otra, con 4 ayudantes, trabajó 6 días.

¿Qué dinero debe recibir cada empresa?

Un propietario alquila una finca de 105 000 metros cuadrados a tres labradores, distribuyéndola entre los tres proporcionalmente al número de personas de cada familia. La familia del labrador A se compone de 4 personas, la del B de 5 y la del C de 6.

Calcula la parte de terreno que le corresponde a cada uno.

En una prueba ciclista se reparte un premio de 16 650 euros, entre los tres primeros corredores, de modo inversamente proporcional al tiempo que han tardado en llegar. El primero tarda 12 minutos, el segundo 15 minutos y el tercero 18 minutos.

¿Cuánto le corresponde a cada uno?

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Indica cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son monomios.

- a) $3,7x^2$ b) $\frac{1}{3}x^3$ c) $6\left(\frac{x}{3}\right)^3$ d) $\frac{x + y + z}{11}$

Escribe el coeficiente, la parte literal y el grado de cada monomio.

- a) $7x^2y$ b) $6xy^4z^2$ c) $-23x^5y^4$ d) $-9x^2yz^3$

Escribe un monomio semejante a cada uno de estos monomios.

- a) $7xyz$ b) $-11x^4y^2$ c) $3x^4y^5$ d) $13x^7y^3$

Un alumno define el grado de un monomio como el número de factores que forman su parte literal.

- a) ¿Coincide esta definición con la dada?
b) Aplica las dos definiciones al monomio $3x^2y^4$

¿Cuáles de estas expresiones algebraicas son polinomios?

- a) $\frac{5}{2a + b}$ b) $\frac{2 + x}{2}$ c) $\frac{1}{3}x + 1 - \frac{2}{4}x^2$ d) $2^x + 1$

Indica el grado de los siguientes polinomios.

- a) $3xy^2 + 2x^2y + 5x^2y^2$ b) $2zt + 3t^3 + 2z^5$

Determina el valor numérico de cada polinomio para $x = 10$.

a) $x^3 + x + 1$

b) $-x^4 - x^2$

c) $2x^4 - x^2 - 1$

d) $x^6 - x^3$

Calcula el valor numérico del polinomio $P(x) = x^3 - 6 + 11x - 6$ para los valores $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$.

Reduce términos en estas expresiones.

a) $8x - 7y - 5x$

b) $x^3 - 6z^3 - 4z^3 + 2x^3$

c) $12xy^2 - xy^2 - 4yx^2$

d) $2xy + 3x + x^4$

La suma de dos monomios es $10x^5$. Indica qué monomios pueden ser.

a) $7x^2$ y $3x^3$

b) $7x^5$ y $3x^5$

c) $6x^4$ y $4x$

d) $9x^5$ y $9x^5$

Con los siguientes polinomios.

$$P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 11$$

$$Q(x) = 4x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 12$$

$$R(x) = 3x^5 - 7x^4 + 6x - 5$$

Realiza estas operaciones.

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - R(x)$

c) $P(x) + Q(x)$

d) $R(x) - Q(x)$

e) $P(x) + Q(x) - R(x)$

f

Realiza estos productos de monomios.

a) $(2y) \cdot (3z)$

b) $(3xy^2) \cdot (-5x^2yz)$

c) $(-5ab^2c) \cdot (4a^3c) \cdot (b^2c)$

d) $(12xy) \cdot (6x^2) \cdot (x^2y^3)$

Multiplica el monomio por el polinomio.

a) $x^2 \cdot (3x^2 - 5x + 1)$

b) $5zt \cdot (2z^2t - 3zt^3)$

c) $ab \cdot (2ab^2 + 3c - ab)$

d) $2xy^2 \cdot (5x + 2y - 3xy)$

Calcula estos productos de binomios.

a) $(x^2 + 11) \cdot (x^2 - 11)$

b) $(x^3 + y^3) \cdot (7x + 2)$

c) $(2x - 3y) \cdot (x - y)$

d) $(3tz - 2t^2) \cdot (tz - z^2)$

Saca factor común en estas expresiones.

a) $x^3 - 7x^4 + 2x^2y$

b) $-4z^2x - 2zx^4 - 12zx$

c) $3t^5 + 21t^3x^4 + 15t^2x$

d) $6x^4y - 24x^7y + 12x^3y^2$

Realiza estos productos.

a) $(2x^2 + x + 1) \cdot (x - 3)$

b) $(3x^3 - x^2 + 3) \cdot (2x + 1)$

Efectúa estos productos de polinomios.

a) $(x^5 - 6x^3 - 3x^2 + 2x - 1) \cdot (x^3 - 3x + 1)$

b) $(x^4 - 7x^3 + x^2 - 1) \cdot (x^3 + 4x^2 - 6x + 2)$

Desarrolla estas potencias.

a) $(2x + y + 1)^2$

b) $(2ab - 1 + a)^2$

c) $(2a + 1)^3$

d) $(1 - 3t)^3$

Comprueba la veracidad de estas igualdades. Si alguna es falsa, escribe el resultado verdadero.

a) $(2x^3 + 3x)^2 = 4x^6 + 9x^2 + 12x^4$

b) $(2x^3 - 5x)^2 = 4x^6 - 25x^2 + 20x^4$

c) $(5x + 3)(5x - 3) = 25x^2 + 9$

d) $(3x^2 - 4y)^2 = 9x^2 - 16y^2$

Desarrolla las siguientes expresiones utilizando las igualdades notables.

a) $(a + 3b)^2$

b) $(a - 3b)^2$

c) $(3a + b)^2$

d) $(a + 3b) \cdot (a - 3b)$

Saca factor común en estas expresiones.

a) $-8x^2y^3 + 4x^3y - 2x^4y^2$

b) $9t^3x^4 - 5t^2x^6 + 2t^7x^5$

c) $8z^2t - \frac{2}{3}x^3t^2 - \frac{4}{7}z^4t^3$

d) $-\frac{2}{21}a^3b^2 - \frac{4}{15}a^4b^7 - \frac{14}{3}a^9b^4$

Expresa estos polinomios en forma de productos.

a) $x^2 - 4xy + 4y^2$

b) $49 - 7z + \frac{z^2}{4}$

c) $36z^2t^2 + 24z^2t + 4z^2$

d) $3z^2 + 12zx + 12x^2$

Desarrolla las siguientes potencias de polinomios.

a) $(3x - 4)^3$

b) $(x + 1)^4$

c) $(2x + 3y)^4$

d) $(x + y + z)^2$

Realiza las siguientes operaciones.

a) $-5x(x^2 + x + 1) + 4(-x^3 + 7x^2 - 2)$

b) $(3x - 2)^2 \cdot (-2x + 1) - 3(6x^3 - 4x^2 + 3x - 2)$

c) $\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{5}\right)$

d) $(-x + 2) \cdot (5x + 3) \cdot (2x - 4) - 3x(x + 1)$

e) $4(-5x^2 + 6x - 1) - (2x^3 - 6) + 7x^2 - 8x$

f) $(-7x + 2) \cdot (4x - 5) - 2x(-3x^2 + 9)$

g) $-x^2 \cdot (x^3 - x^2 - 1) - x(x^2 - 1)$

h) $(x + 1)^3 - x^3 - 1 - 3(x^2 + 1)$

i) $-2x(-x^2) - 5x^2(2x^3) + (x^4 - 2x^2) \cdot (-7x + 2)$

j) $3(x - 1) - 4(7x^2 - 9x) + 7(-4x + 2)$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Divide los siguientes monomios.

a) $54x^5 : 9x^2$

b) $63x^{12} : 3x^5$

c) $35xy^6 : 7y^3$

d) $121x^2y^6 : 11yx^4$

Efectúa estas divisiones.

a) $(60x^3 - 75x^2) : 15x$

b) $(121x^2 - 55x) : 11x^2$

Realiza las siguientes divisiones.

a) $(26x^3z - 52x^5z) : 13x^2$

b) $(26x^3z + 39x^4z) : 13x^4z$

Realiza estas divisiones.

a) $(x^3 + 6x^2 + 6x + 5) : (x^2 + x + 1)$

b) $(x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6) : (x^2 - x + 2)$

c) $(x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 5x + 6) : (x^2 + 3x - 2)$

d) $(x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 5x - 7) : (x^4 - 3x + 1)$

a)
$$\begin{array}{r} x^3 + 6x^2 + 6x + 5 \quad | \quad x^2 + x + 1 \\ \underline{-x^3 - x^2 - x} \quad x + 5 \\ 5x^2 + 5x \\ \underline{-5x^2 - 5x - 5} \\ 0 \end{array}$$

Efectúa la siguiente división de polinomios.

$$(6x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 8x - 3) : (2x^2 + 3x - 1)$$

Realiza estas divisiones aplicando la regla de Ruffini, y escribe el cociente y el resto de la división.

a) $(4x^3 - 8x^2 - 9x + 7) : (x - 3)$

c) $(5x^5 - 7x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3x - 1) : (x + 1)$

b) $(2x^3 + 5x^2 - 4x + 2) : (x + 3)$

d) $(6x^4 + 9x^3 - 10x^2 + 8x - 2) : (x - 2)$

a)

3	4	-8	-9	7
	12	12	9	
	4	4	3	16

$$C(x) = 4x^2 + 4x + 3$$

$$R(x) = 16$$

Averigua el cociente y resto de estas divisiones mediante la regla de Ruffini.

a) $(2x^3 - x^2 + 5) : (x - 3)$

b) $(3x^5 + 3x^2 - 4) : (x + 1)$

Efectúa las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.

a) $(x^3 - 1) : (x - 1)$

b) $(x^4 + 1) : (x + 1)$

Utiliza el teorema del resto para calcular el resto de estas divisiones.

a) $(x^{11} - 2x^2) : (x - 1)$

c) $(x^{12} - 81) : (x + 1)$

b) $(x^7 - 1) : (x - 1)$

d) $(-x^{14} + 101) : (x + 1)$

Comprueba si $x + 1$ es un factor de estos polinomios.

a) $A(x) = 3x^4 - 2x^2 + x$

c) $C(x) = x^7 + 1$

b) $B(x) = -2x^2 + 3x$

d) $D(x) = 2x^3 - 3x + 1$

Encuentra entre los siguientes factores los del polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$.

a) $x - 1$

c) $x + 1$

b) $x - 3$

d) $x + 2$

Descompón en factores estos polinomios.

a) $x^2 - 6x + 8$

b) $x^2 - 14x + 33$

c) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

d) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

a)

Factoriza los siguientes polinomios.

a) $x^4 - x^2$

b) $x^3 - 1$

c) $x^3 - x^2 + 9x - 9$

d) $x^4 - 6x^3 - 7x^2$

EXPRESIONES FRACCIONARIAS

Halla el valor numérico de la fracción $\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 6x + 8}$ para los valores 2, 0 y 4.

Indica si estas fracciones tienen valor numérico para los valores que anulan el denominador.

a) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4}$

b) $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$

Comprueba si son equivalentes las siguientes fracciones: $\frac{x + 1}{x}$ y $\frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$.

Escribe tres fracciones equivalentes a $\frac{x + 1}{x^2 - 1}$.

Simplifica las siguientes fracciones.

a) $\frac{x^2 + 1}{x^4 - 1}$

b) $\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 8x + 15}$

a) $\frac{x^2 + 1}{x^4 - 1} = \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} = \frac{1}{x^2 - 1}$

Opera estas fracciones.

a) $\frac{7x}{x^3 + 5} + \frac{6x + 1}{x^3 + 5}$

b) $\frac{3xy}{x - y} - \frac{1 - 2xy}{x - y}$

Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\frac{7x + 3}{x - 4} + \frac{5x}{x^2 - 16}$

b) $\frac{2x}{x - 5} - \frac{x + 2}{x - 1}$

Realiza las siguientes operaciones con fracciones: $\frac{x}{x - 1} + \frac{2}{x + 2} + \frac{x + 1}{x - 2}$.

Calcula estos productos.

a) $\frac{x + 1}{x} \cdot \frac{x - 1}{x + 2}$

b) $\frac{2x - 1}{x - 3} \cdot \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 4}$

Efectúa el producto y simplifica el resultado: $\frac{x^2}{x + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3}$.

Operaciones con fracciones algebraicas

Realiza las operaciones.

$$\text{a) } \frac{3x}{x-5} + \frac{2x-1}{x+2} \quad \text{b) } \frac{2x-1}{x^2-4} - \frac{3x-1}{x-2} \quad \text{c) } \frac{2x-1}{3x} \cdot \frac{x+2}{x^2-3x+1} \quad \text{d) } \frac{x^2-x+1}{x^3} : \frac{4x-7}{x+1}$$

$$\text{a) } \frac{3x}{x-5} + \frac{2x-1}{x+2} = \frac{3x(x+2) + (2x-1)(x-5)}{(x-5)(x+2)} = \frac{5x^2 - 5x + 5}{x^2 - 3x - 10}$$

Opera y simplifica.

$$\text{a) } \left(\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} \right) \cdot \left(x - \frac{4}{x} \right) \quad \text{b) } \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x-1} \right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x-1} \right)$$

$$\text{a) } \left(\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} \right) \cdot \left(x - \frac{4}{x} \right) = \frac{(x+2)^2 - (x-2)^2}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-4}{x} = 8$$

Operaciones con expresiones radicales

Realiza las operaciones.

$$\text{a) } \sqrt[3]{xy} \cdot \sqrt[3]{x^2y}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[5]{x^4y^3}$$

$$\text{e) } (\sqrt[4]{x^2y^3})^3$$

$$\text{b) } \sqrt[5]{x^2y} : \sqrt[5]{xy}$$

$$\text{d) } \sqrt[6]{\sqrt[3]{xy}}$$

$$\text{f) } \sqrt[3]{x^4y} : \sqrt[9]{x^3y^2}$$

ECUACIONES Y SISTEMAS

Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 20$

b) $\left(\frac{x}{4} - 1\right)\frac{2}{3} - \frac{x-1}{2} = 2x$

c) $\frac{2x+3}{3} + \frac{7x-5}{4} = 7$

d) $1 - \frac{2(x-1)}{5} = \frac{3(2-x)}{2}$

Calcula la solución de estas ecuaciones.

a) $x^2 - 10x + 24 = 3$

b) $5x^2 - 9x + 4 = 0$

c) $-x^2 + 2x = 0$

d) $x(2x - 5) = 6 - x$

e) $2x - 6 = 2x(x + 2)$

f) $x^2 - 9 = -2x^2$

Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^6 - 10x^3 + 9 = 0$

c) $x^4 - 26x^2 = -25$

d) $x^6 - 64x^3 = 0$

e) $4x^2 + 8x = 0$

f) $3x^3 - 12x^2 + 12x = 0$

Halla las soluciones de estas ecuaciones.

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

b) $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$

Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{2}{x} - \frac{2-x}{x+3} = 1$

b) $\frac{x}{x+1} + \frac{2}{x+2} = 3$

Ecuaciones de primero y segundo grado

Resuelve estas ecuaciones lineales.

a) $-4x + 3 = 7x - 19$

b) $\frac{-3x}{4} + \frac{1}{2} = -5x + 26$

c) $-5(2x - 1) + 3x - 2 = -(6x - 4) + 7$

d) $\frac{4x - 3}{5x + 1} = \frac{9}{16}$

e) $\frac{x + 3}{6} + \frac{2x - 1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x - 5}{12} - \frac{2}{3}$

f) $\frac{3(x - 2)}{5} + 2(-3x + 1) - \frac{2}{5} = \frac{-4x + 3}{15} + \frac{16}{3}$

Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores.

a) $3(2x - 5) + 8x - 6 = \frac{x}{2} - (5x + 3)$

b) $\frac{3(x + 3)}{2} - 2(2 - 3x) = 8x - 1 - 2(x + 3)$

c) $\frac{x - 4}{5} - 4(-2x + 1) - \frac{(-4x + 2)}{10} = 2(x - 3) + \frac{5x + 6}{2}$

d) $\frac{6 - 2(x - 3)}{7x} = \frac{8}{-4}$

Clasifica en tu cuaderno las siguientes ecuaciones de segundo grado según el número de soluciones distintas que tengan.

- a) $5x^2 + 6x + 2 = 0$ I. 0 soluciones
b) $-3x^2 + 4x + 5 = 0$ II. 1 solución
c) $x^2 - 6x + 1 = 0$ III. 2 soluciones
d) $x^2 - 5 = 0$

Calcula la solución de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

- a) $6x^2 - 11x + 3 = 0$
b) $x^2 - 6x - 7 = 0$
c) $x^2 - 6x + 9 = 0$
d) $-2x^2 + 2x + 24 = 0$
e) $3x^2 + x + 5 = 0$
f) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando un procedimiento diferente de la fórmula general.

- a) $3x^2 - 27 = 0$
b) $x^2 + 2x + 1 = 0$
c) $-7x^2 + \frac{5}{2}x = 0$
d) $(x - 2)^2 - 25 = 0$

Halla la solución de estas ecuaciones de segundo grado.

$$\text{a) } \frac{3x^2}{2} - \frac{4x-1}{4} = \frac{2x(x-3)}{6} + \frac{17}{12}$$

$$\text{b) } 3x^2 - 4x + 5(x^2 - 2) = \frac{3x(x-2)}{2} + 14$$

$$\text{c) } 6x^2 - 1 + \frac{2x(-x+3)}{3} = \frac{5x^2-2}{6} - 4x^2 + \frac{59}{6}$$

$$\text{d) } \frac{3(-x+2)}{5} + 4x\left(\frac{-2x+1}{3}\right) = x(-3x+1) - \frac{1}{2}$$

$$\text{e) } \frac{3x-1}{5} = \frac{13}{4x+5}$$

Resolución de otros tipos de ecuaciones

Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando un cambio de variable.

$$\text{a) } x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$\text{b) } 3x^4 - 15x^2 + 12 = 0$$

$$\text{c) } x^6 - 7x^3 - 8 = 0$$

$$\text{d) } x^6 - 2x^3 + 1 = 0$$

$$\text{e) } x^8 - 17x^4 + 16 = 0$$

Encuentra la solución de estas ecuaciones por factorización.

a) $-2x^3 + 4x^2 + 18x - 36 = 0$

b) $4x^3 - 24x^2 + 48x - 32 = 0$

c) $-3x^4 + 3x^3 + 12x^2 - 12x = 0$

d) $6x^4 - 5x^3 - 43x^2 + 70x - 24 = 0$

Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

$$\text{a) } \frac{4}{x-2} - \frac{6}{x+3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \frac{x+1}{3x-2} + \frac{2x+1}{x+5} = \frac{3}{2}$$

$$\text{c) } \frac{4x+2}{x^2+2x+1} + \frac{3}{2} = \frac{x+5}{x+1}$$

$$\text{d) } \frac{3}{x+1} - \frac{6}{x+4} = \frac{-2}{4x-8}$$

Halla la solución de estas ecuaciones radicales.

$$\text{a) } x - \sqrt{x} - 6 = 0$$

$$\text{b) } \sqrt{8-x} = 2-x$$

$$\text{c) } \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1$$

$$\text{d) } 2\sqrt{x-1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{x-1}}$$

$$\text{e) } x + \sqrt{x-1} - 3 = 0$$

$$\text{f) } \sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4}$$

$$\text{g) } \sqrt{5x+1} - 2 = \sqrt{x+1}$$

Resuelve los sistemas utilizando el método de reducción.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 3x - 6y = 5 \end{cases}$$

Resuelve gráficamente los siguientes sistemas.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4x - y = -10 \\ 5x + y = 1 \end{cases}$$

Mario gasta un viernes por la tarde en el cine $\frac{1}{2}$ del dinero que llevaba, y un $\frac{1}{3}$ de lo que le queda en un bocata a la salida del cine. Vuelve a casa con 4 euros. ¿Cuánto dinero llevaba al salir de casa?

En una clase de 3.º de ESO, la cuarta parte repiten curso. El director cambió a tres repetidores del grupo por otros tres de otro grupo que no habían repetido. Ahora solo repiten curso $\frac{1}{7}$ del total. ¿Cuántos alumnos hay en la clase?

Me faltan 4,10 euros para comprar mi pizza favorita. Si tuviera el triple de lo que tengo compraría 2 pizzas. ¿Cuánto cuesta la pizza y cuánto dinero llevo?

En una fiesta a la que acuden 42 personas, hay tres hombres más que mujeres y tantos niños como hombres y mujeres juntos. Halla el número de hombres, mujeres y niños.

Javier tiene 5 años más que su hermano Miguel y su madre tiene 42 años. Dentro de tres años la edad de la madre será el triple que la suma de las edades de los hijos. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

En el Concurso Literario Anual, la asociación de padres y madres de alumnos de un instituto premia con libros, por un valor de 196 euros, a los alumnos que hayan presentado las tres mejores redacciones. Deciden repartir el premio proporcionalmente a sus puntuaciones: 10; 9,5 y 8,5. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada alumno premiado?

Durante el recreo, en la cafetería de mi instituto, compro todas las mañanas un bocadillo y un refresco. El bocadillo cuesta el triple que el refresco, y en total me cobran 1,80 euros. ¿Cuál es el precio del bocadillo?, ¿y el del refresco?

En un mercadillo solidario se venden dos tipos de figuras de artesanía. Unas a 1,50 euros y otras a 2,50 euros. Se vendieron 82 figuras y se obtuvieron 154 euros. ¿Cuántas unidades se vendieron de cada tipo?

Una caja de material de geometría contiene objetos triangulares y rectangulares. En total hay 20 objetos y se pueden contar hasta 68 vértices. ¿Cuántos objetos hay de cada clase?

Dos números suman 46 y la diferencia de sus cuadrados es 92. ¿Qué números son?

La superficie de una habitación rectangular mide 11,25 metros cuadrados, y el perímetro, 14 metros. ¿Cuáles son las dimensiones de la habitación?

El perímetro de un triángulo isósceles es 13 centímetros y la altura sobre el lado desigual mide 4 centímetros. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?

Dos números suman 90. Si divido el mayor entre el menor, el resto es 6 y el cociente es 3. ¿Cuáles son los números?

INECUACIONES Y SISTEMAS

Resuelve las siguientes inecuaciones aplicando las reglas de la suma y del producto.

a) $3x - 5 > 4x$

c) $4 - x \geq x - 6$

b) $3x + 6 \leq 2x + 10$

d) $2 + 6x > 2x - 3$

Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $3(2x + 2) > 3(3x + 4)$

c) $1 - 2(x + 5) \geq -3$

e) $x + \frac{1 - x}{6} < 2 - \frac{2 + x}{2}$

b) $\frac{5x - 7}{3} < x + 5$

d) $2x - 5 < 2(x + 1) + x$

f) $3x - \frac{1 - 2x}{2} \leq 4 + x$

Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $x - 2 > 3$

d) $2x + 1 \leq 3x$

b) $3x - 3 < x + 1$

e) $x - 2 \geq 2x - 3$

c) $1 - 2x \geq 2x + 4$

f) $5 + x < x + 3$

Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $x^2 - 2x - 3 > 0$

b) $x^2 - 8x + 12 \geq 0$

c) $4x^2 + 4x - 3 \leq 0$

d) $x^2 + 1 < 0$

e) $x(x + 1)(x - 2) > 0$

f) $x^3 - 9x \leq 0$

Encuentra la solución de estas inecuaciones.

a) $\frac{1}{x+2} < 0$

c) $\frac{x+3}{x-5} > 0$

e) $\frac{x^2-1}{x^2} < 0$

b) $\frac{x}{x-2} \geq 0$

d) $\frac{x+4}{1-x} \leq 0$

f) $\frac{x-4}{x^2-3x+2} \geq 0$

Utiliza el método de factorización para resolver las siguientes inecuaciones.

a) $\frac{x + 5}{x + 2} \leq 0$

c) $\frac{3 - x}{x + 2} < 0$

e) $-10x^3 + 52x^2 - 70x + 12 \geq 0$

b) $\frac{x + 3}{x^2} > 0$

d) $-5x^2(x - 2)(x + 1) \leq 0$

f) $\frac{(x - 2)(x + 5)}{4x - 6} \geq 0$

SEMEJANZA

Un triángulo puede definirse dando la medida de sus tres lados. Indica cuáles de las siguientes parejas de triángulos son semejantes.

a) 5, 6, 7 y 15, 18, 20

b) 4, 6, 8 y 1; 1,5; 2

Razona si son semejantes estas figuras.

a) Dos cuadrados.

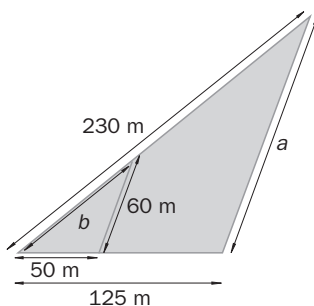
b) Tres triángulos equiláteros.

c) Dos rectángulos.

La escala de un mapa es de 1:250000. ¿A cuántos kilómetros se encontrarán dos ciudades que en el mapa están separadas 12 centímetros?

Un triángulo equilátero tiene 40 centímetros cuadrados de área. Halla el área del triángulo que se obtiene al unir los puntos medios de los lados.

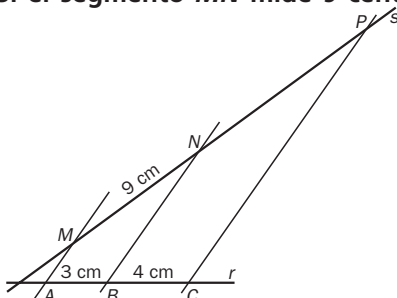
Halla las medidas que faltan en la figura.



Aplicando el teorema de Tales,

En una recta r hay tres puntos A , B y C que distan sucesivamente 3 y 4 centímetros. Por esos puntos se trazan rectas paralelas que cortan a otra, s , en M , N y P .

Si el segmento MN mide 9 centímetros, ¿cuál es la distancia entre los puntos N y P ?



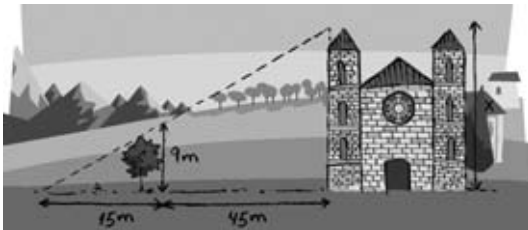
Javier se encuentra de vacaciones en Nueva York y dispone de un plano a escala 1:15 000 de la ciudad. Quiere ir desde su hotel a un museo que dista 3,5 centímetros en el plano. ¿Cuál es la distancia, medida en metros, que debe recorrer?

Se realiza una fotocopia de un mapa, cuya escala es de 1:20 000, ampliándolo al 130%.

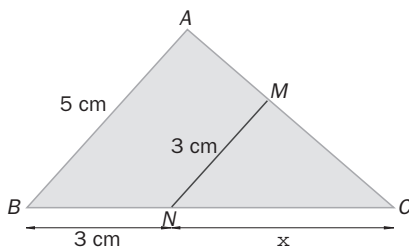
- Si la distancia entre dos lugares del mapa es de 4,8 centímetros, ¿qué distancia los separa en la fotocopia realizada?
- ¿Cuál es la distancia real que separa estos dos lugares?

Teorema de Tales. Criterios de semejanza

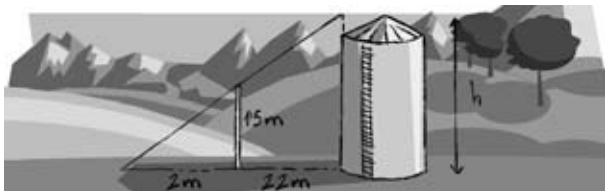
Calcula la altura de la torre de la iglesia.



Si los segmentos AB y MN son paralelos, halla la medida del lado BC .

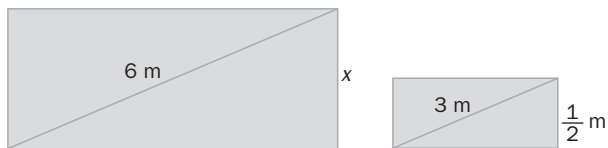


Para saber la altura del silo (depósito de trigo) de un pueblo, se alinea con él un palo y se mide su sombra. Halla la altura del silo.



Consecuencias de los criterios de semejanza

Si los rectángulos son semejantes, ¿cuál es el valor de x ?

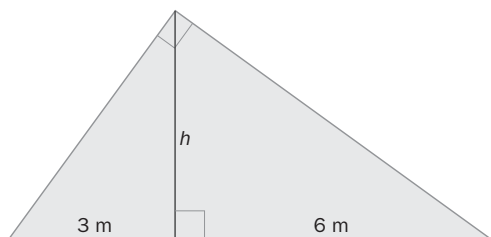


Dos triángulos son semejantes. Si el perímetro del primero mide 52 centímetros y la razón de sus áreas es $\frac{64}{49}$, ¿cuál es el perímetro del segundo?

¿Cuánto mide la altura de un triángulo rectángulo semejante al que tiene catetos de 12 y 16 centímetros si la razón de semejanza es $k = \frac{2}{3}$?

Se quiere construir dos rascacielos con base en forma de hexágono regular. La arista de la base de uno de ellos mide 2 decímetros. Calcula el área de la base del otro rascacielos sabiendo que la razón de sus perímetros es $\frac{3}{2}$.

En la siguiente figura, ¿cuánto mide h ?



Calcula el área de un triángulo rectángulo en el que la altura sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos de 8 y 2 centímetros, respectivamente.

Un patio circular tiene 200 metros cuadrados de superficie. Si el radio se triplicara, ¿se triplicaría también la superficie? Razona tu respuesta.

El logotipo de una empresa tiene la forma de un hexágono cuyos lados miden 3, 4, 5, 7, 8 y 9 centímetros.

En los carteles publicitarios se quiere dibujar un hexágono semejante de 117 centímetros de perímetro. ¿Cuánto miden los lados homólogos?

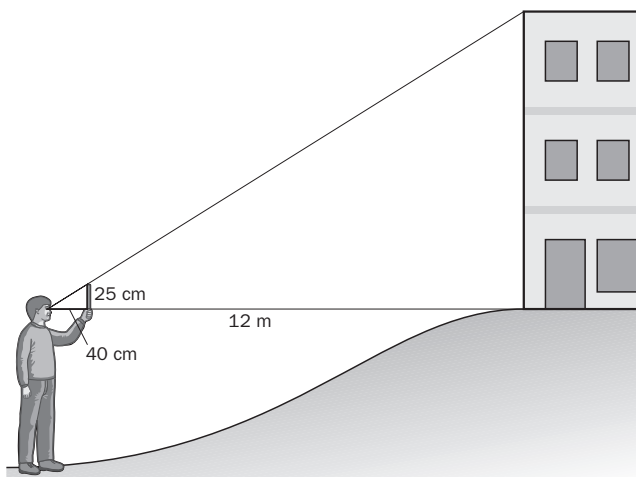
En el plano de una vivienda en construcción aparece dibujado un salón rectangular de 13,5 centímetros cuadrados de área. Si la escala del plano es de 1:150, ¿cuál es el área real del salón?

Las alturas de Mónica y su madre en una fotografía, cuya escala es de 1:75, son 2,08 y 2,2 centímetros respectivamente.

Si encargan una ampliación que aumenta el tamaño de la fotografía en un 25%, ¿cuánto medirán las dos en ella? ¿Cuál será la escala?

Para realizar prácticas de óptica, un estudiante que mide 1,70 metros situado a 12 metros de un edificio, coloca frente a sus ojos una regla vertical de 25 centímetros con la que oculta exactamente la altura del mismo.

Si la distancia del ojo a la regla es de 40 centímetros, calcula la altura del edificio.



GEOMETRÍA ANALÍTICA

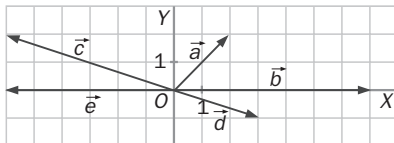
Las coordenadas de los vértices de un rectángulo son $A(2, 2)$; $B(2, 5)$; $C(6, 5)$, y $D(6, 2)$.

Halla las coordenadas y representa los vectores \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} y \overline{DA} . ¿Qué relación existe entre \overline{AB} y \overline{CD} ? ¿Y entre \overline{BC} y \overline{DA} ?

Las coordenadas de un punto A son $(3, 1)$ y las del vector \overline{AB} son $(3, 4)$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto B ? Determina otro punto C de modo que el vector \overline{AC} tenga el mismo módulo y la misma dirección que el vector \overline{AB} , pero distinto sentido.

Representa los vectores $\vec{a} = (2, 2)$; $\vec{b} = (7, 0)$; $\vec{c} = (-6, 2)$; $\vec{d} = (3, -1)$, y $\vec{e} = (-6, 0)$ con origen en el origen de coordenadas. ¿Qué coordenadas tienen los extremos de cada vector?

Halla las coordenadas de los vectores de la figura.



Dados los vectores $\vec{u} = (6, 5)$; $\vec{v} = (-3, 0)$ y $\vec{w} = (2, -4)$, calcula:

- $2\vec{u}$
- $3\vec{v} - \vec{w}$
- $5(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{w}$

Los vértices de un paralelogramo son $A(3, 4)$; $B(-4, 4)$; $C(3, -4)$, y D . ¿Cuáles son las coordenadas de D ?

Dados los vectores $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ y $\vec{v} = \vec{i} + 5\vec{j}$, calcula:

- a) \vec{u}
- b) \vec{v}
- c) Ángulo (\vec{u}, \vec{v})

¿Qué ángulo forman dos vectores opuestos? ¿Qué ángulo forman dos vectores equipolentes? Razona tu respuesta con un dibujo.

Dados los vectores $\vec{u} = (4, 3)$ y $\vec{v} = (12, 5)$, halla el ángulo que forman estas parejas.

- a) \vec{u} y \vec{v}
- b) $-\vec{u}$ y $-\vec{v}$
- c) $-\vec{u}$ y \vec{v}
- d) \vec{u} y $-\vec{v}$

Dado el punto $A(3, 2)$, halla las coordenadas de otro punto B sabiendo que se encuentra en el eje de ordenadas y que dista 5 unidades de A .

Las coordenadas del punto medio del segmento AB son $(3, 5)$. Halla las del punto B siendo $A(2, 9)$.

Sean $A(2, 3)$ y $B(-8, 7)$ dos puntos del plano. Calcula las coordenadas del punto medio del segmento AB .

Halla la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por $A(-2, 4)$ y tiene como vector director $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$

Determina todas las formas de la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2, 5)$ y lleva la dirección $\vec{v} = (4, 1)$.

Halla la ecuación punto-pendiente y la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto $A(2, 8)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-1, 9)$.

Indica un punto y un vector de estas rectas.

a) $(x, y) = (2, 4) + t(5, -3)$

c) $\begin{cases} x = -1 + 9t \\ y = -8 - 6t \end{cases}$

b) $\frac{x - 3}{3} = \frac{y + 2}{2}$

d) $2x - 3y + 8 = 0$

Halla todas las formas de la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene como pendiente $m = -7$.

Halla la ecuación en forma continua de la recta que pasa por los puntos $P(-4, 0)$ y $Q(0, 2)$.

Halla todas las formas de la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(3, 0)$ y $Q(0, -3)$.

Representa gráficamente la recta que pasa por los puntos $A(3, -1)$ y $B(8, 9)$, y halla todas las formas de su ecuación.

Representa la recta de ecuación $y = -4x + 12$, y halla las restantes formas de su ecuación.

Dadas la recta r , determinada por los puntos $A(2, 3)$ y $B(4, 7)$, y la recta s , determinada por los puntos $C(2, 7)$ y $D(7, 8)$, razona si r y s son paralelas o secantes.

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, 2)$ y es paralela a la recta de ecuación $5x + 3y + 7 = 0$.

Determina un vector cuyo módulo mida $\sqrt{10}$ unidades y que sea perpendicular a $\vec{v} = (6, -2)$.

Calcula la distancia entre los puntos:

- a) $A(4, -2)$ y $B(0, 9)$
- b) $C(-1, 10)$ y $D(8, -5)$

Halla las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo de vértices $A(2, 1)$; $B(2, 5)$ y $C(-2, 3)$.

Ecuaciones de la recta

Determina un punto por el que pasan y un vector director de cada una de las siguientes rectas.

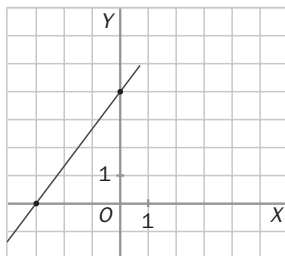
a) $\frac{x - 3}{-2} = \frac{y + 4}{5}$

c) $\left. \begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = 5 + 3t \end{array} \right\}$

b) $4x - y = 0$

d) $(x, y) = (4, 0) + t(2, -6)$

Halla todas las formas de la ecuación de la recta de la figura.



Halla la pendiente de la recta $3x + 2y - 6 = 0$.

Escribe en todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3, 1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (5, -2)$.

Calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(-3, 6)$ y $B(4, 1)$.

Comprueba si el punto $B(4, -6)$ pertenece a alguna de estas rectas.

a) $y = 9 - 3x$

b) $5x + 3y - 2 = 0$

¿Son secantes las rectas $r: 4x - 5y - 2 = 0$ y $s: y = 2x - 4$? En caso afirmativo, calcula su punto de corte.

Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas.

a) $r: 4x - 6y + 10 = 0$

$s: 2x - 3y + 4 = 0$

b) $r: 2x + 3y + 6 = 0$

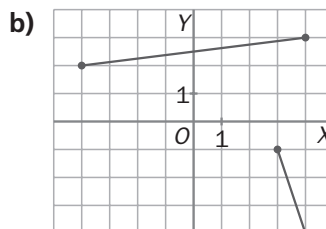
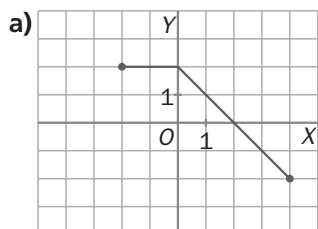
$s: 6x + 9y + 18 = 0$

Halla la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto $P(0, 2)$ y tiene la misma pendiente que $\frac{x - 1}{-1} = \frac{y + 2}{3}$.

¿Cuál es la posición relativa de las dos rectas?

FUNCIONES

Indica si estas gráficas son funciones y, en caso afirmativo, halla su dominio y recorrido.

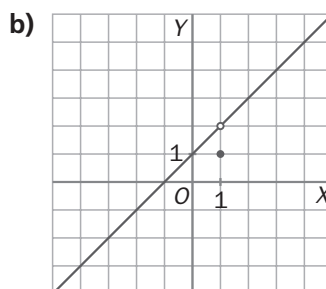
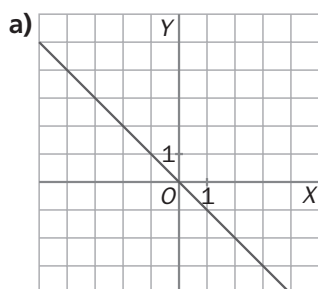


En algunos países se utilizan las pulgadas para expresar longitudes. Para pasar de centímetros a pulgadas se multiplica por 2 y se divide por 5.

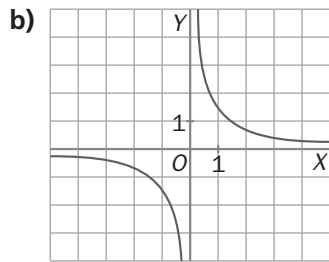
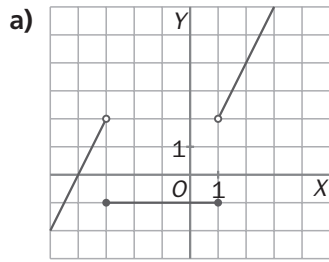
a) ¿Es una función la relación entre los centímetros y las pulgadas?

b) Forma una tabla, representa la gráfica y expresa la fórmula.

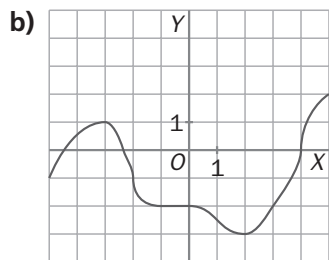
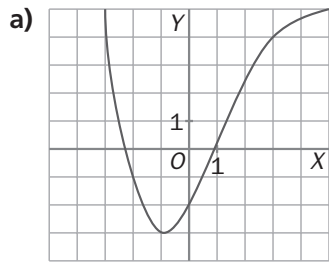
Estudia si son continuas las siguientes funciones.



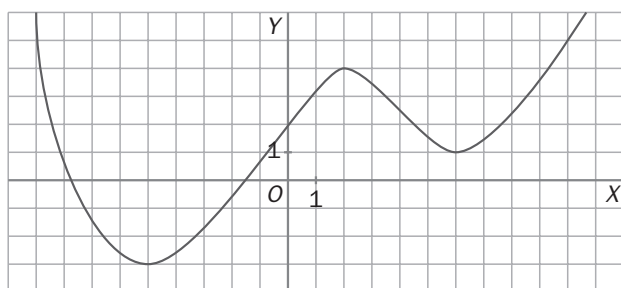
Indica en qué puntos son discontinuas estas funciones.



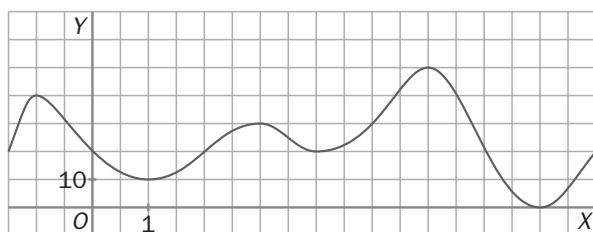
Halla la tasa de variación de estas funciones en el intervalo $[-2, 3]$.



Indica dónde crece o decrece la siguiente función.



Determina los máximos y mínimos de la función.



Dibuja la gráfica de una función continua que tenga un máximo en el punto $(2, 1)$ y un mínimo en el punto $(5, 6)$.

Representa una función continua que tenga:

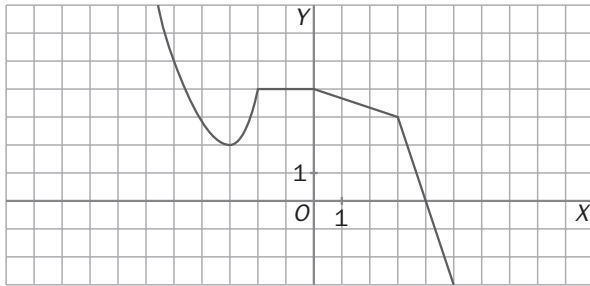
- Un máximo en el punto $(-2, 1)$.
- Un máximo absoluto en el punto de abscisa $x = 2$.
- Un mínimo en el punto de abscisa $x = 0$.
- Sin mínimo absoluto.

Calcula la tasa de variación de la función en estos intervalos.

a) $[-3, -2]$

b) $[-2, 0]$

c) $[3, 4]$

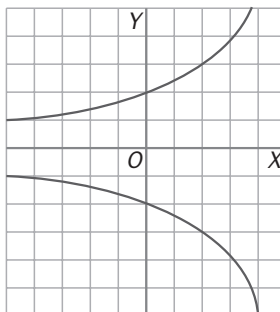
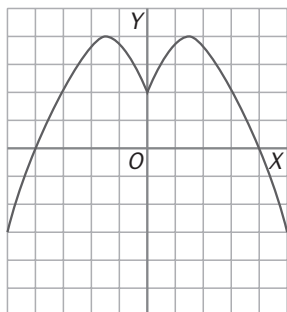


Un anuncio por palabras en un diario cuesta 2,80 euros por palabra y se establece un mínimo de tres palabras para poder ser admitido.

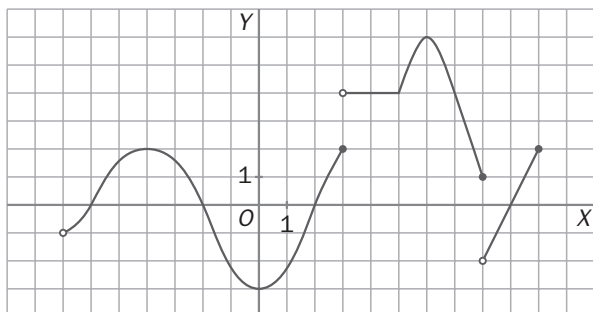
- Elabora una tabla y una gráfica de la función que relaciona el número de palabras con el precio del anuncio.
- ¿Es continua la función?
- ¿Dónde se producen discontinuidades?
- ¿Existe algún intervalo donde la función sea continua?

Función. Continuidad y tasa de variación

¿Cuáles de las siguientes gráficas representan una función?



Observa la gráfica y estudia las siguientes propiedades.



- Dominio y recorrido.
- Calcula $f(-3)$, $f(4)$ y $f(8)$.
- Intervalos de continuidad y discontinuidad.
- Tasa de variación en los intervalos $[-4, -2]$, $[0, 3]$ y $[6, 8]$.

FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

Indica cuáles de las siguientes funciones son lineales.

a) $y = -5$

d) $y = 0,3x$

b) $y = 0,04 + 23x$

e) $y = -2x^2$

c) $y = 1 - x^2$

f) $y = -0,5x + 2$

Expresa cada una de estas funciones mediante una fórmula e indica cuáles son lineales.

a) A cada número real le corresponde su doble.

b) A cada número real le corresponde su doble más cinco.

c) A cada número real le corresponde su cuadrado.

Indica la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones lineales.

a) $y = 3x$

c) $y = 3x + 1$

b) $y = -5x + 2$

d) $y = \frac{1}{2}x + 3$

Halla la ecuación de la función lineal que pasa por el punto $A(2, 9)$ y tiene pendiente -3 .

Determina la ecuación de la función lineal que pasa por los puntos $A(2, -1)$ y $B(5, 4)$.

Representa estas funciones lineales.

a) $y = 4x - 2$

b) $y = -3x + 5$

c) $y = -x$

d) $y = \frac{1}{2}x + 2$

Escribe la ecuación de dos rectas que sean paralelas a cada una de estas funciones lineales.

a) $y = 2x - 3$

c) $y = -x + 1$

b) $y = 3x$

d) $y = -5x + 7$

Un ciclista parte del kilómetro 10 de una carretera a una velocidad constante de 20 kilómetros hora.

- Halla la expresión algebraica de la función que relaciona el punto kilométrico de la carretera con el tiempo transcurrido desde el inicio.
- Representa la función.

Se ha realizado una campaña de vacunación en una comunidad autónoma. Los gastos de distribución son 600 euros y los gastos de vacunación son 5 euros por cada vacuna puesta.

- Determina la expresión algebraica de esta función.
- Representa la función.

Representa estas funciones cuadráticas y estudia las gráficas que obtengas.

a) $y = 2x^2 - 4x - 6$

b) $y = -x^2 - 6x + 27$

Representa las siguientes funciones cuadráticas y analiza las gráficas obtenidas.

a) $y = 2x^2 - 6$

b) $y = x^2 - 5x$

¿Cuál de las siguientes rectas no es paralela a las otras?

a) $y = \frac{-3x + 1}{6}$

b) $x + 2y - 3 = 0$

c) $y = \frac{-x}{2}$

d) $y = \frac{1}{2}x + 6$

¿Están alineados los puntos $(-1, 7)$, $(2, -5)$ y $(0, 3)$?

Halla la ecuación de la recta paralela a $y = \frac{-x + 1}{5}$ que pasa por el punto $A(-3, 4)$.

Representación y aplicación de una función lineal

Representa las siguientes funciones lineales.

a) $y = 3x - 2$

c) $y = \frac{1}{4}x$

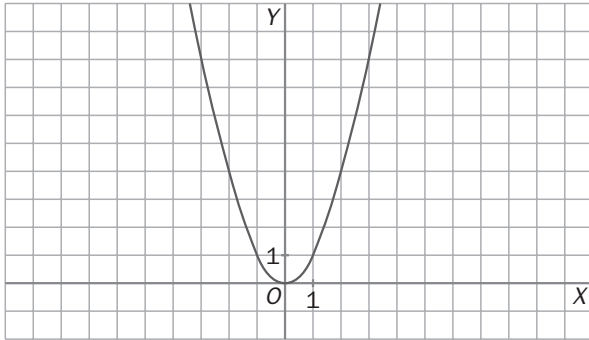
e) $y = x - \frac{1}{2}$

b) $y = -2x - 1$

d) $y = -\frac{2}{3}x + 3$

f) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

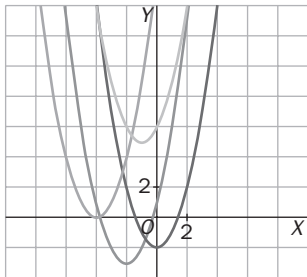
Dada esta gráfica de una parábola.



Traslada la gráfica, sin variar la orientación ni la abertura, de forma que el vértice sea el indicado en cada caso.

- | | |
|--------------|---------------|
| a) $(0, -2)$ | c) $(-1, 5)$ |
| b) $(-4, 0)$ | d) $(-2, -3)$ |

Escribe, en cada caso, la ecuación de la parábola.



Representa las siguientes parábolas.

- | | | |
|------------------------|------------------------|---------------------|
| a) $y = x^2 - 4x + 3$ | c) $y = x^2 - 5x + 6$ | e) $y = 2x^2 - 10x$ |
| b) $y = x^2 + 6x + 10$ | d) $y = x^2 - 6x + 10$ | f) $y = x^2 - 16$ |

Funciones lineales

Escribe la ecuación de la función lineal paralela a $y = -7x + 1$, y que tiene la misma ordenada en el origen que $y = 4x - \frac{1}{3}$.

Halla la ecuación de la función lineal que pasa por los puntos $(-5, 3)$ y $(-1, -1)$.

$$y = mx + n$$

Representa las siguientes funciones lineales.

a) $y = -3x + 1$

b) $y = \frac{3}{2}x - 2$

a)

b)

Determina el valor de m para que la recta $y = (2m - 1)x + 2$ pase por el punto $A(-3, 2)$.

Sustituimos las coordenadas de $A(-3, 2)$ en la ecuación de la recta.

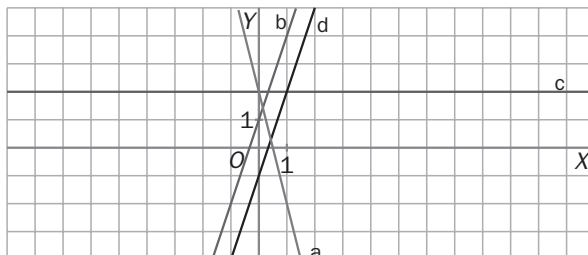
Relaciona cada gráfica con su ecuación.

a) $y = -4x + 2$

b) $y = 3x + 1$

c) $y = 2$

d) $y = 3x - 1$



Representa las siguientes funciones cuadráticas y estudia la gráfica obtenida.

a) $y = -2x^2 + 12x - 10$

b) $y = x^2 - 2x + 4$

c) $y = 2x^2 - 8x + 6$

d) $y = 3x^2 + 1$

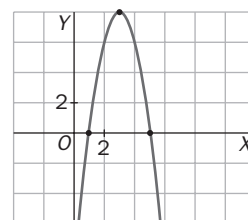
a) Abierta hacia abajo, $a < 0$

Punto de corte con el eje OY : $x = 0 \rightarrow y = -10 \rightarrow (0, -10)$

Hallamos el vértice de la parábola: $x_v = -\frac{b}{2a} = 3 \rightarrow y_v = 8 \rightarrow V(3, 8)$

Puntos de corte con el eje OX : $y = 0 \rightarrow -2x^2 + 12x - 10 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 80}}{-4} = \frac{-12 \pm 8}{-4} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 5 \end{array} \right. \rightarrow (1, 0), (5, 0)$$



ESTADÍSTICA

Clasifica los siguientes caracteres estadísticos.

- a) Número de canastas encestandas en un partido de baloncesto.
- b) Canal de televisión preferido por los vecinos de una casa.
- c) Medida, en metros, del salto de longitud en unos juegos olímpicos.

En una ciudad hay tres millones de personas con derecho a voto, de las que el 53 % son mujeres. Se quiere elegir una muestra constituida por 3000 personas.

¿Cuántos hombres y mujeres deberán formar parte de la muestra para que sea representativa de la población?

La tabla adjunta muestra el número de faltas de asistencia en una clase a lo largo de un mes.

N.º de faltas	0	1	2	3	4	5
N.º de alumnos	10	7	6	2	1	4

Calcula la media aritmética y la moda.

La siguiente tabla muestra los resultados de unos alumnos en la prueba de salto de longitud.

Salto (m)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)
N.º de alumnos	6	12	15	4

Halla la media aritmética y la moda.

Calcula la mediana y los cuartiles de la distribución estadística dada por esta tabla.

x_i	2	3	4	5	6
f_i	11	17	23	24	15

Calcula la mediana, Q_1 y Q_3 de la siguiente distribución.

x_i	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)
f_i	12	16	17	11

La tabla adjunta muestra el número de faltas en una clase a lo largo de un mes.

N.º de faltas	0	1	2	3	4	5
N.º de alumnos	10	7	6	2	1	4

Representa los datos gráficamente.

La siguiente tabla muestra los resultados de unos alumnos en la prueba de salto de longitud.

Salto (m)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)
N.º de alumnos	10	9	11	7

Dibuja el diagrama de cajas y bigotes (box-plot)

La siguiente tabla muestra el número de faltas en una clase a lo largo de un mes.

N.º de faltas	0	1	2	3	4	5
N.º de alumnos	10	7	6	2	1	4

a) Calcula el rango.

b) Halla la varianza y la desviación típica.

La tabla adjunta representa los resultados de unos alumnos en la prueba de salto de longitud.

Salto (m)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)
N.º de alumnos	6	12	15	4

a) Halla el rango.

b) Calcula la varianza y la desviación típica.

Una distribución viene dada por la siguiente tabla.

x_i	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)
f_i	5	12	20	11	6

Halla el porcentaje de datos incluidos en los intervalos $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$, $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ y $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$.

Los porcentajes de uso del cinturón de seguridad en dos ciudades durante 4 días son:

A	87	78	67	82
B	60	95	92	47

Calcula el coeficiente de variación en cada ciudad e interpreta el resultado.

La siguiente tabla presenta el número de horas semanales que dedican al estudio los 30 alumnos de una clase de 4.º de ESO.

N.º de horas	N.º de alumnos
[0, 4)	8
[4, 8)	10
[8, 12)	8
[12, 16)	4

- a) Halla la media, la moda, la mediana y los otros dos cuartiles.
- b) Calcula el rango, la varianza y la desviación típica.
- c) Representa el histograma y el polígono de frecuencias.
- d) Dibuja el diagrama de cajas y bigotes.

Se ha realizado un estudio con el fin de averiguar la cantidad de papel reciclado en toneladas de los distintos distritos y se han obtenido los siguientes resultados. 64, 65, 68, 67, 68, 67, 72, 74, 80, 74, 68, 74, 68, 72, 68, 65, 72, 67, 68, 85.

a) Halla la media y la desviación típica.

b) Calcula el porcentaje de distritos cuyas cantidades recicladas se encuentran dentro del intervalo

$$(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$$

Se han medido las temperaturas máximas alcanzadas en dos ciudades durante 10 días consecutivos del mes de agosto, obteniéndose los siguientes resultados.

A	32	33	24	22	35	30	29	31	20	19
B	27	28	25	31	24	25	24	26	22	28

a) ¿Los habitantes de qué ciudad han tenido una temperatura media más alta a lo largo de esos 10 días?

b) ¿Qué ciudad ha sufrido una variabilidad de temperatura mayor?

c) ¿Qué parámetro has empleado para contestar el anterior apartado? ¿Por qué?

Las notas obtenidas en la asignatura de Matemáticas por los alumnos de dos clases de 4.º de ESO son las siguientes.

Notas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4.º A	5	4	1	0	0	0	0	0	1	4	5
4.º B	0	0	2	2	3	6	3	2	2	0	0

- ¿Cuál es la calificación media de cada una de las dos clases?
- ¿Cuál de ellas tiene las notas menos dispersas?
- ¿Es necesario calcular el coeficiente de variación para poder determinarlo? ¿Por qué?

La profesora de Educación Física realiza un estudio referente a la altura y el peso de los alumnos de una clase, obteniendo los siguientes resultados: la altura, en metros, del 95 % de los alumnos se encuentra dentro del intervalo (1,52; 1,92), y el peso, en kilogramos, del mismo porcentaje de alumnos se incluye en el intervalo (56,9; 66,1).

¿Cuál de las distribuciones tiene una dispersión relativa mayor?

El número de asignaturas suspensas en 4.º de ESO en un centro de Secundaria en septiembre viene reflejado en la siguiente tabla.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	20	12	8	7	17	13	8	7	5	3	5

- Calcula la mediana y los cuartiles.
- Haz un diagrama de cajas y bigotes, y analiza la simetría de la distribución.
- ¿Cuál es la media de suspensos?
- En este centro han definido los siguientes parámetros: el *índice de éxito escolar*, que mide el porcentaje de alumnos con posibilidad de titular (dos o menos suspensos); el *índice de repetición*, que establece los alumnos entre tres y seis suspensos, y el *índice de fracaso escolar*, que determina los alumnos con siete o más suspensos.

En una población nórdica con 2500 habitantes adultos se ha realizado un estudio sobre su altura. La distribución de alturas es normal (unimodal y simétrica).

Sabiendo que en el intervalo (172, 196) se encuentran 2375 habitantes y que la altura media es de 184 centímetros, calcula:

- La desviación típica de la distribución.
- El número de habitantes que miden entre 178 y 190 centímetros.

Caracteres y parámetros estadísticos. Gráficos

La siguiente tabla muestra las edades de las personas que acuden a un bibliobús de barrio solicitando préstamos de libros en un día cualquiera.

Edad	N.º de personas
[6, 8)	5
[8, 10)	12
[10, 12)	14
[12, 14)	13
[14, 16)	4
[16, 18)	2

- Halla la media, la moda y el tercer cuartil.
- Calcula la desviación típica.
- Representa el histograma y el polígono de frecuencias.

Completa la siguiente distribución con dos datos más de forma que:

2, 5, 6, 7, 7, 9

- a) Se conserve la media, pero la desviación típica aumente.
- b) Se conserve la media, pero la desviación típica disminuya.

Dadas las distribuciones:

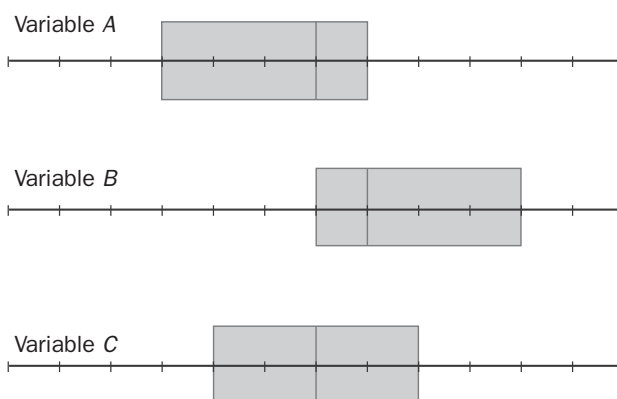
x_i	f_i
1	3
3	7
5	11
7	18
9	21

x_i	f_i
1	15
3	7
5	15
7	8
9	15

x_i	f_i
1	5
3	12
5	25
7	14
9	4

¿En cuál de ellas se puede decir que en el intervalo $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ se encuentra el 68 % de los datos?
¿Por qué?

Estos son los diagramas de cajas y bigotes de tres variables.



Determina qué se puede decir de cada uno de ellos en cuanto a los siguientes aspectos.

- a) Concentración de los datos.
- b) Dispersión de los datos.
- c) Simetría.

PROBABILIDAD

Indica si estos experimentos son aleatorios y, en caso afirmativo, forma el espacio muestral.

- Se extrae, sin mirar, una carta de una baraja española.
- Se lanza un dado tetraédrico regular, cuyas caras están numeradas del 1 al 4, y anotamos el resultado de la cara oculta.
- Se mide la longitud del perímetro de un cuadrado de 4 centímetros de lado.

Expresa el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios.

- Se lanza una moneda y se anota el resultado de la cara superior.
- Se lanza un dado de quinielas, que tiene tres caras con un 1, dos caras con una X y una cara con un 2, se espera que se pose sobre una cara y se anota el resultado de la cara superior.
- Se extrae, sin mirar, una bola de una urna que contiene ocho bolas numeradas del 1 al 8, y se anota el número de la bola extraída.

Se lanza una moneda de un euro y se anota el resultado de la cara superior.

- Establece los distintos tipos de sucesos.
- Escribe el espacio de sucesos.

Se lanza un dado con las caras numeradas del 1 al 6, y se anota el número de la cara superior.

Determina estos tres sucesos y sus contrarios.

$A = \text{"salir impar"}; B = \text{"salir número menor que 4"}; C = \text{"salir número mayor que 8"}.$

Se realiza un experimento que consiste en lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6, y anotar el número de la cara superior. Dados estos sucesos: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 5, 6\}$ y $C = \{3\}$; halla los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$ y $B \cap C$.

En el experimento del ejercicio anterior considera los sucesos $F = \{2, 4\}$ y $G = \{1, 4, 5, 6\}$.

- Determina los sucesos contrarios de F y G .
- Obtén los sucesos $F \cup \bar{F}$, $F \cap \bar{F}$, $G \cup \bar{G}$ y $G \cap \bar{G}$

Se lanzan una moneda y un dado cúbico. Forma el espacio muestral, construyendo previamente el diagrama en árbol.

Se extrae una carta de una baraja española, y se lanza un dado tetraédrico y una moneda. ¿Cuántos resultados diferentes podemos obtener?

En una clase de 3.º de ESO hay 16 chicas y 14 chicos. Se escribe el nombre de cada uno de ellos en una tarjeta y se introducen en una caja las 30 tarjetas. A continuación, se extrae una tarjeta. Halla las siguientes probabilidades.

- a) La tarjeta extraída tiene el nombre de un chico.
- b) La tarjeta extraída tiene el nombre de una chica.

En una caja de caramelos hay 10 de menta, 6 de fresa y 5 de anís. Se escoge un caramelo al azar. Halla las siguientes probabilidades.

- a) Que el caramelo sea de menta.
- b) Que el caramelo sea de fresa.
- c) Que el caramelo sea de anís.

Determina la probabilidad de que al extraer al azar una carta de una baraja española:

- a) Sea un caballo.
- b) No sea un caballo.
- c) Sea una de espadas.
- d) No sea una de espadas.

La probabilidad de que mañana llueva es $\frac{2}{7}$. ¿Cuál es la probabilidad de que mañana no llueva?

Se gira la perindola y se anota el número sobre el que se apoya. Si $A =$ "salir número mayor de 3", $B =$ "salir número par" y $C =$ "salir múltiplo de 5", calcula $P(A \cup B)$ y $P(B \cup C)$.

Se lanza un dado octaédrico regular cuyas caras están numeradas del 1 al 8, y anotamos el número de la cara oculta. Si $A =$ "salir número múltiplo de 3", $B =$ "salir número par" y $C =$ "salir número impar", calcula:

a) $P(A \cup B)$

b) $P(B \cup C)$

Se lanzan 3 dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6.

a) Determina la probabilidad de obtener 3 cincos.

b) Halla la probabilidad de obtener 3 números impares.

En un juego de ordenador aparecen 3 frutas al azar, por ejemplo: PERA - MANZANA - PIÑA.

Si hay programadas 5 frutas diferentes para cada una de las 3 posiciones, calcula la probabilidad de obtener el resultado del ejemplo.

Se extraen sucesivamente 2 bolas de una urna que contiene 12 bolas amarillas y 7 bolas negras. Halla la probabilidad de que ambas sean amarillas si la primera bola extraída:

a) Se devuelve a la urna.

b) No se devuelve a la urna.

En una bolsa hay 10 bolas numeradas del 0 al 9. Se realiza un experimento que consiste en extraer sucesivamente 2 bolas.

Halla la probabilidad de que ambas correspondan a un número impar si la primera bola extraída:

a) Se devuelve a la bolsa.

b) No se devuelve a la bolsa.

Experimentos y sucesos aleatorios

Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios.

- a) Número de personas que suben a un autobús en una parada.
- b) Aplicar el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo.
- c) Conocer el ganador de la Liga de Campeones.
- d) Calcular la raíz cuadrada de un número.

Se considera el experimento aleatorio consistente en sacar una bola de una urna en la que hay 9 bolas numeradas del 1 al 9. Determina:

- a) El espacio muestral.
- b) El suceso $A = \text{"sacar un número par"}$.
- c) El suceso $B = \text{"sacar un número mayor que 3"}$.
- d) Los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$. ¿Son A y B incompatibles?
- e) El suceso contrario de B .

Se lanza un dado cúbico. Indica los sucesos elementales que forman cada uno de estos sucesos.

- a) Sacar un múltiplo de 3.
- b) Sacar un número menor que 4.
- c) Sacar un 0.
- d) Sacar un número primo mayor que 3.
- e) Sacar un número menor que 7.

Técnicas de recuento

Un experimento consiste en lanzar sucesivamente una moneda y un dado octaédrico. ¿Cuántos resultados posibles tiene este experimento? Utiliza un diagrama en árbol para orientarte.

Sonia tiene 2 pantalones de deporte, 4 camisetas y 3 pares de zapatillas. ¿De cuántas formas distintas se puede vestir para hacer ejercicio?

En una caja hay 2 bolas negras, 4 bolas azules y 3 verdes. Calcula la probabilidad de que al extraer una bola al azar:

- a) Sea negra.
- b) Sea negra o azul.
- c) No sea roja.
- d) Sea roja
- e) No sea azul.
- f) Sea azul y negra.

Calcula la probabilidad de que la última cifra de un número de teléfono sea:

- a) Un 7.
- b) Un múltiplo de 3.
- c) Mayor que 5.
- d) Menor que 2.

Se lanza un dado al aire y se consideran estos sucesos:

A = "sacar un número par"

B = "sacar menos que 3"

C = "sacar un 5"

Forma los siguientes sucesos y halla su probabilidad.

- a) $A \cup B$
- b) $A \cap B$
- c) $A \cup B \cup C$
- d) $B \cup C$
- e) $A \cap C$
- f) $A \cap B \cup C$

Experimentos compuestos

Calcula la probabilidad de que, al sacar sucesivamente dos cartas de una baraja española, las dos sean caballo.

- a) Si se devuelve al mazo la primera.
- b) Si no se devuelve.

Una bolsa contiene 4 bolas rojas, 3 azules y 2 verdes. Se extraen, sin devolución, 2 bolas de la bolsa. Calcula la probabilidad de estos sucesos.

- a) Se extraen las dos rojas.
- b) No se extrae ninguna bola verde.

En una clase de 3.º de ESO hay 12 chicas y 16 chicos. Se eligen dos personas al azar.

Calcula la probabilidad de que:

- a) Las dos sean chicas.
- b) Sean una chica y un chico.

En una urna hay 5 bolas blancas y 4 negras. Sacamos una bola y, sin devolverla a la urna, sacamos otra. Calcula:

- a) La probabilidad de que ambas sean de distinto color.
- b) La probabilidad de que ambas sean blancas.
- c) La probabilidad de que ambas sean del mismo color.
- d) La probabilidad de que ambas sean de distinto color, considerando que ha habido devolución a la urna de la bola extraída.

En una familia con 3 hijos se consideran los siguientes sucesos.

A = "el hijo mayor es un chico".

B = "los dos hijos pequeños son chicas".

C = "al menos uno de los hijos es chico".

- a) ¿Son A y B independientes?
- b) ¿Son B y C incompatibles?
- c) ¿Cuál es el suceso contrario de C ?

Se lanza una moneda 2 veces. Calcula la probabilidad de estos sucesos.

- a) Salir dos cruces.
- b) Salir al menos una cara.

Calcula la probabilidad de que, al lanzar 2 dados al aire, la suma de puntos que se consigue sea siete.

Se lanza un dado. Determina la probabilidad de que haya salido un 2, sabiendo que ha salido un número menor que 5.

Considera los números de tres cifras. ¿Cuál es la probabilidad de que, elegido uno al azar, sus 3 dígitos sean distintos?

En un garaje hay 4 coches de la marca *A*, de los cuales 2 son negros, y 6 coches de la marca *B*, de los cuales 4 son negros. Calcula la probabilidad de que al elegir un coche al azar:

- a) Sea de la marca *A*
- b) Sea negro.
- c) Sea negro de la marca *A*.
- d) Sea de la marca *B*, pero no negro.
- e) Sabiendo que es negro, sea de la marca *B*.
- f) Sabiendo que es de la marca *A*, sea negro.

En una nevera hay 6 tomates verdes, 4 tomates rojos, 3 limones y 5 naranjas. Sacamos una pieza al azar. Halla la probabilidad de:

- a) Sacar un tomate verde.
- b) No sacar un tomate.
- c) Sabiendo que es un tomate, que sea rojo.

Un bombo tiene 3 bolas numeradas del 1 al 3, y un segundo bombo tiene 5 bolas numeradas del 1 al 5. Se saca una bola del primer bombo y, a continuación, una bola del segundo.

Calcula la probabilidad de que salga:

- a) El número 34.
- b) Un número mayor que 15.
- c) Un número menor que 30.

Sucesos aleatorios y técnicas de recuento

Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas y se consideran los sucesos:

$A = \text{"sacar una copa"}; B = \text{"sacar un rey"}; C = \text{"sacar una carta menor que 5"}.$

Determina estos sucesos.

- a) $A \cup B, A \cup C$ y $B \cup C$.
- b) $A \cap B, A \cap C$ y $B \cap C$.
- c) $A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$.
- d) El suceso contrario de C .
- e) El suceso contrario de $A \cup B$.

Se extrae una bola de una bolsa que contiene 4 bolas blancas, 5 rojas y 2 negras. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea negra?

Calcula la probabilidad de obtener un as o un oro al extraer una carta de una baraja española.

Una urna contiene 8 bolas rojas, 5 verdes y 9 azules. Determina la probabilidad de que al extraer una bola al azar:

- a) Sea verde.
- b) Sea roja o azul.

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0,3$ y $P(B) = 0,2$. ¿Es posible que $P(A \cup B) = 0,6$?

Calcula la probabilidad del suceso A , sabiendo que $2 \cdot P(A) + P(\bar{A}) = 1,4$.

Considera los números de 5 cifras.

- a) ¿Cuántos son capicúas?
 - b) ¿Cuántos son impares?
 - c) ¿Cuántos tienen las cinco cifras distintas?
 - d) ¿Cuántos son pares, capicúas y mayores de 50 000?
- a) $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 900$

Si A y B son dos sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ y $P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{5}$, calcula $P(A \cup B)$.

En una caja hay un número desconocido de bolas blancas y una bola negra. Se extraen de la caja simultáneamente dos bolas al azar, sin reemplazamiento. Si la probabilidad de que ambas sean blancas es 0,5, calcula el número de bolas blancas que hay en la caja.