Trigonometría

RELACIÓN FUNDAMENTAL

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\sec^2\alpha$$

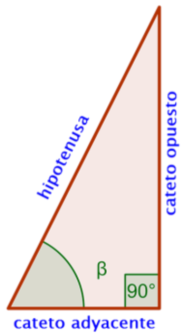
$$1+\operatorname{cotg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha$$

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

$$\operatorname{sen}\beta=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \operatorname{cosec}\beta=\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\cos\beta=\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \sec\beta=\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \operatorname{cotg}\beta=\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$



Sistema sexagesimal: *circunferencia* $=360^\circ=2\pi\,\text{rad}$

$1^\circ=60'$; $1'=60''$; $L_{arco}=\text{radio}\cdot\text{ángulo}$ (*en rad*)

$\boxed{20^\circ\,40'\,48''}\rightarrow 20^\circ+\frac{40}{60}+\frac{48}{3600}=20+0,\hat{6}+0.01\hat{3}\approx\boxed{20,68^\circ}$

$\boxed{20,68^\circ}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}20^\circ\\0,68\cdot60=40,8'\\0,8\cdot60=48''\end{array}\right\}\rightarrow\boxed{20^\circ\,40'\,48''}$

Conversión: $1^\circ\approx0,0175\,\text{rad}$; $1\,\text{rad}\approx57,296^\circ$

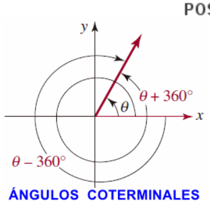
$\frac{a}{180}=\frac{b}{\pi}\rightarrow$ grados $\underset{\times\frac{180}{\pi}}{\overset{\times\frac{\pi}{180}}{\rightleftarrows}}$ radianes

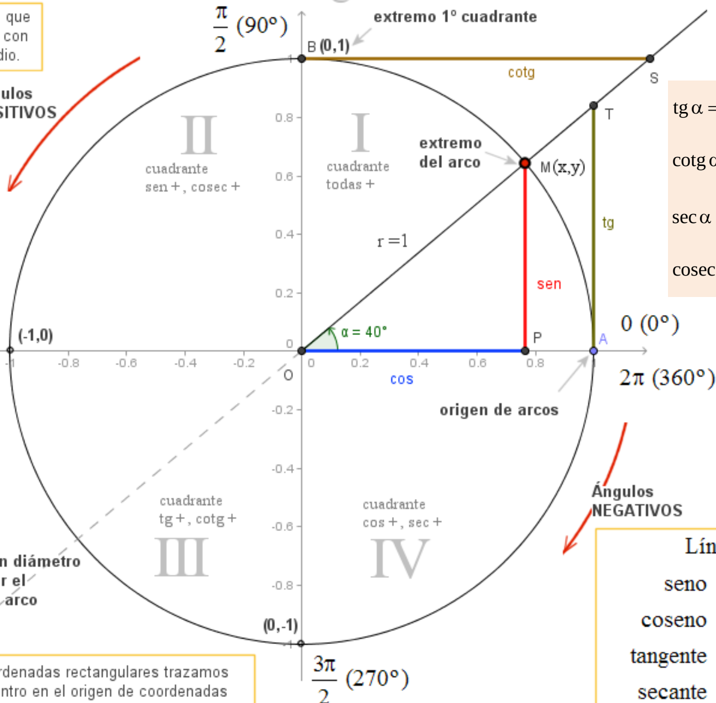
$\boxed{143,24^\circ}\underset{\times\frac{180}{\pi}=57,296}{\overset{\times\frac{\pi}{180}=0,0175}{\rightleftarrows}}\boxed{2,5\,rad}$

Razones trigonométricas de cualquier ángulo

Circunferencia goniométrica

1 radián es el ángulo al que le corresponde un arco con igual longitud que el radio.





$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \qquad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\text{ordenada}}{\text{radio}}=\frac{y}{r} \qquad \cos\alpha=\frac{\text{abscisa}}{\text{radio}}=\frac{x}{r} \qquad \tan\alpha=\frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}}=\frac{y}{x}$$

Líneas

- seno $\rightarrow\overline{PM}$
- coseno $\rightarrow\overline{OP}$
- tangente $\rightarrow\overline{AT}$
- secante $\rightarrow\overline{OT}$
- cosecante $\rightarrow\overline{OS}$
- cotangente $\rightarrow\overline{BS}$

Sobre un sistema de coordenadas rectangulares trazamos una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio la unidad, llamada circunferencia goniométrica. Los ejes de coordenadas delimitan cuatro cuadrantes que se nombran utilizando números romanos en sentido contrario a las agujas del reloj.

Área (A), radios de la circunferencia inscrita (r) y circunscrita (R), y semiperímetro (s)

$$A=\frac{base\times altura}{2}\quad;\quad s=\frac{a+b+c}{2}$$

$$A=\frac{1}{2}bc\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}ac\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\gamma$$

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=r\cdot s$$

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

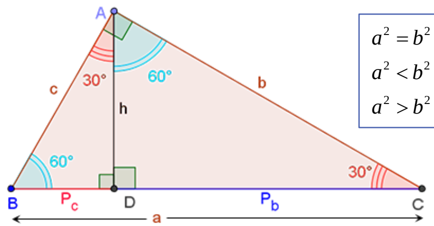
$$R=\frac{1}{2}\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{1}{2}\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{1}{2}\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

[1] Tres segmentos son triángulo si:

$$\boxed{s>a\ \ y\ \ s>b\ \ y\ \ s>c}$$

Triángulos rectángulos

T. Pitágoras: $\boxed{a^2=b^2+c^2}$



$a^2=b^2+c^2$	$\rightarrow$	*T. rectángulo*
$a^2<b^2+c^2$	$\rightarrow$	*T. acutángulo*
$a^2>b^2+c^2$	$\rightarrow$	*T. obtusángulo*

Teorema de la altura $\rightarrow h^2=P_b\cdot P_c$; $h\cdot a=b\cdot c$

Teorema del cateto $\rightarrow b^2=a\cdot P_b$; $c^2=a\cdot P_c$

Cualquier triángulo

Teorema del seno :

Las longitudes de los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}=2R$$

Teorema del coseno :

En todo triángulo se verifica que

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

Nota: *Para ángulos obtusos el coseno es negativo*

Función *arco seno* : $\boxed{y=\operatorname{arcsen}x\Leftrightarrow x=\operatorname{sen}y}$

ej. con la calculadora: $\boxed{\sin^{-1}}\rightarrow\operatorname{arcsen}(0,5)=30^\circ$

TRANSFORMACIONES

Ángulo DOBLE

$$\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Ángulo MITAD

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Sumas en Productos

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Productos en sumas

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$$
$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

Sumas y Diferencias

$$\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

[1] Tres segmentos forman triángulo si el valor de su semisuma es mayor que la longitud de cualquiera de ellos.

VALORES

grados	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt3}{3}$	1	$\sqrt3$	*	0	*	0
cotg	*	$\sqrt3$	1	$\frac{\sqrt3}{3}$	0	*	0	*
sec	1	$\frac{2\sqrt3}{3}$	$\sqrt2$	2	*	-1	*	1
cosec	*	2	$\sqrt2$	$\frac{2\sqrt3}{3}$	1	*	-1	*

Un radián (1 **rad**) es el ángulo central (de una circunferencia) que abarca un arco con igual longitud que el radio.

Notación: $(\operatorname{sen}\alpha)^2=\operatorname{sen}^2\alpha\neq\operatorname{sen}\alpha^2$

$\operatorname{tg}\alpha=\tan\alpha$ **;** $\operatorname{cotg}\alpha=\cot\alpha$ **;** $\operatorname{cosec}\alpha=\csc\alpha$