

DEFINICIÓN

$$\log_a N = b \Leftrightarrow a^b = N$$

Y se lee "logaritmo en base a de N"

$$\forall a > 0 \wedge a \neq 1; N > 0; b \in \mathbb{R}$$

De la definición deducimos que:

$$a^{\log_a N} = N$$

El logaritmo de un número es un exponente, y solo eso.

Propiedades

$$\textcircled{1} \log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$$

$$\textcircled{2} \log_a \left(\frac{P}{Q} \right) = \log_a P - \log_a Q$$

$$\textcircled{3} \log_a P^n = n \cdot \log_a P$$

$$\textcircled{4} \log_a \sqrt[n]{P} = \frac{\log_a P}{n}$$

Observaciones

El cero no tiene logaritmo:

$$\log_a 0 \rightarrow \nexists$$

Los números negativos no tienen logaritmo:

$$\log_a (-k) \rightarrow \nexists; k > 0$$

Logaritmos decimales

$$\log_{10} N = \log N$$

Logaritmos neperianos

$$\log_e N = \ln N$$

CAMBIO DE BASE

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

$$\bullet \log_a N = \frac{\log N}{\log a} = \frac{\ln N}{\ln a}$$

$$\bullet \log_a P = \frac{1}{\log_a P}$$

$$\bullet \log_a \left(\frac{P}{Q} \right) = -\log_a \left(\frac{Q}{P} \right)$$

$$\bullet \log_{\frac{1}{a}} P = -\log_a P$$

$$\bullet \log_{\frac{1}{P}} = -\log P = \text{co} \log P$$

Antilogaritmo

$$\log_a x = y \Rightarrow \text{Anti} \log_a y = x \Leftrightarrow a^y = x$$

Ejemplo

$$\text{Si } \log N = \log_{10} N = 2,1673 \Rightarrow N = 10^{2,1673} = 147$$

también se escribe: Anti log 2,1673 = 147

Igualdades

De la definición de logaritmo y de sus propiedades deducimos las siguientes igualdades:

$$\bullet \log_a 1 = 0 \text{ pues } a^0 = 1$$

$$\bullet \log_a a = 1 \text{ pues } a^1 = a$$

$$\bullet \log_a a^n = n$$

$$\bullet \log_a P = \log_{a^n} P^n = \log_{\sqrt[n]{a}} \sqrt[n]{P}$$

$$\bullet \log_{a^n} P^m = \frac{m}{n} \cdot \log_a P; \log_{a^n} a^m = \frac{m}{n}$$

$$\bullet \log_{a^n} P = \frac{1}{n} \cdot \log_a P; \log_{a^n} a = \frac{1}{n}$$

$$\bullet \log_{\sqrt[n]{a}} P = n \cdot \log_a P; \log_{\sqrt[n]{a}} a = n$$

Otras relaciones:

$$\bullet \log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c \cdot \log_e d = \log_e a \text{ "regla de la cadena"}$$

$$\bullet \log_a^n P = (\log_a P)^n = \underbrace{(\log_a P) \cdot (\log_a P) \cdot \dots \cdot (\log_a P)}_{n \text{ veces}}$$

Equivalencias

$$\log 2 = 0,3010$$

$$\log 3 = 0,4771$$

$$\log e = 0,4343$$

$$\ln 2 = 0,6931$$

$$\ln 3 = 1,0986$$

$$\ln 10 = 0,3025$$

$$\log N = 0,4343 \cdot \ln N$$

$$\ln N = 2,3025 \cdot \log N$$

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - \log 2$$

SIGNO

logaritmos	$a > 1$	$0 < a < 1$
$N > 1$	+	-
$0 < N < 1$	-	+

Los logaritmos fueron introducidos en matemáticas con el propósito de facilitar, simplificar o hacer posible complicados y tediosos cálculos numéricos.

Utilizando logaritmos podemos convertir productos en sumas, cocientes en restas, potencias en productos y raíces en cocientes.

El método de cálculo mediante logaritmos aparece en el siglo XVII gracias a los trabajos independientes de Neper y Bürgi. Los logaritmos se emplearon habitualmente en astronomía, geodesia, navegación marítima y matemática.

APLICACIONES: *Geología*: escala Richter; *Química*: cálculo de pH; *Arqueología*: velocidad desintegración del C^{14} ; *Física*: intensidad sonora; *Medicina*: concentración de alcohol en sangre, etc...

Hasta la llegada de las calculadoras y los ordenadores los logaritmos fueron muy utilizados por científicos, ingenieros, ... para realizar operaciones más fácil y rápidamente, usando reglas de cálculo y tablas de logaritmos.

- La constante a es un número real positivo distinto de 1 y se denomina base del sistema de logaritmos.
- El número N debe ser un número real positivo
- El exponente b puede ser cualquier número real

Es decir, la operación de logaritmación ("extracción de logaritmos" o "tomar logaritmos") es siempre posible en el campo real cuando tanto la base a como el número N son positivos.

La base puede ser cualquier número pero las más frecuentes son la base 10 (logaritmos decimales) y la base e (logaritmos neperianos) y lo habitual es no escribir la base.