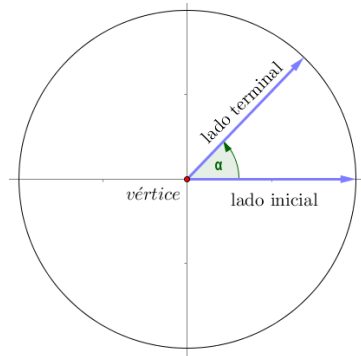


# Funciones Trigonómicas

El concepto de ángulo es esencial en trigonometría. Un ángulo tiene tres partes: un **lado inicial**, un **lado terminal** y un **vértice** (punto de intersección de los dos lados).

Decimos que un ángulo está en **posición canónica** o estándar si su lado inicial está sobre la parte positiva del eje X, y su vértice está en el origen de coordenadas. Si dos ángulos en posición canónica tienen el mismo lado terminal, se llaman ángulos **coterminales**. Por ej.  $45^\circ$ ,  $-315^\circ$ ,  $405^\circ$ , etc.



Podemos medir los ángulos en grados o en radianes. Los **ángulos positivos** se miden en sentido contrario al de las agujas del reloj, a partir del lado inicial. Los negativos, en el sentido de las agujas del reloj.

## RELACIONES ENTRE GRADOS Y RADIANES

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radianes} \approx 0,0175 \text{ rad}$$

$$180^\circ = \pi \text{ radianes (rad)}$$

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados} \approx 57,296^\circ$$

Un **radián** es la medida del ángulo central de un círculo que abarca un arco con igual longitud que el radio del círculo.

Cuando utilizamos radianes para medir ángulos no es necesario indicarlo (p.ej. si un ángulo mide 5 radianes, se escribe  $\alpha = 5$  y no  $\alpha = 5 \text{ radianes}$ ), pero si trabajamos con grados sí debemos indicar la unidad (p.ej. un ángulo de 7 grados se escribe  $\alpha = 7^\circ$ ).

**Definición de Funciones Trigonómicas:** hay dos formas,

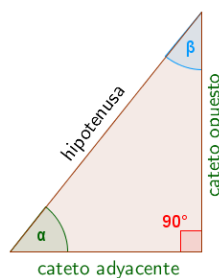
- Las funciones trigonométricas se definen como cociente entre los lados de un triángulo rectángulo.
- Las funciones trigonométricas se definen en términos de un círculo unitario (consideramos un punto sobre el lado terminal de un ángulo en posición canónica).

**DEFINICIÓN** de las funciones trigonométricas utilizando un triángulo rectángulo (en navegación, astronomía, etc...)

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

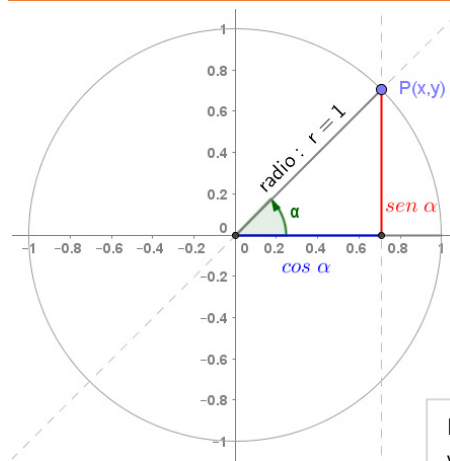
$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \quad \text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$$



Para el ángulo  $\beta$  podemos definir otras seis razones trigonométricas.

**DEFINICIÓN** de las funciones trigonométricas en términos de un círculo unitario (en física, electrónica, biología, etc.)



sen → seno  
cos → coseno  
tg → tangente  
cotg → cotangente  
sec → secante  
cosec → cosecante

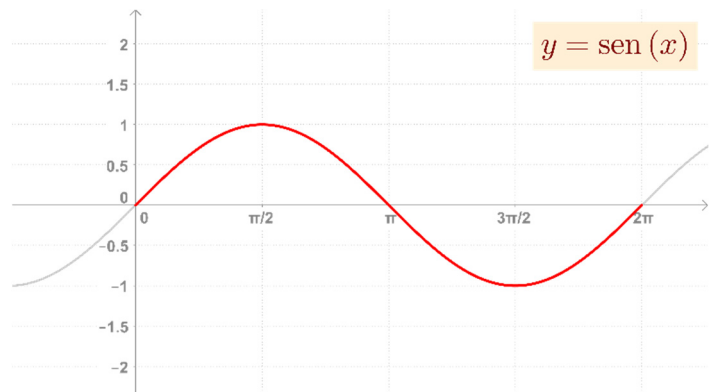
$$\text{sen } \alpha = y \quad \text{cosec } \alpha = \frac{1}{y}; y \neq 0$$

$$\text{cos } \alpha = x \quad \text{sec } \alpha = \frac{1}{x}; x \neq 0$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{y}{x}; x \neq 0 \quad \text{cotg } \alpha = \frac{x}{y}; y \neq 0$$

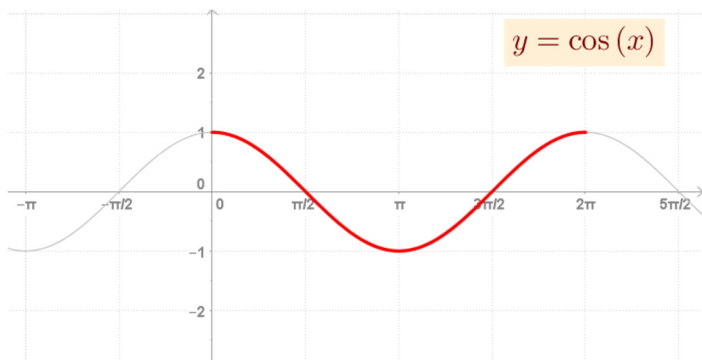
Estas fórmulas expresan valores en términos de coordenadas de un punto P en un círculo unitario, por eso a veces se denominan **funciones circulares**.

## Función seno



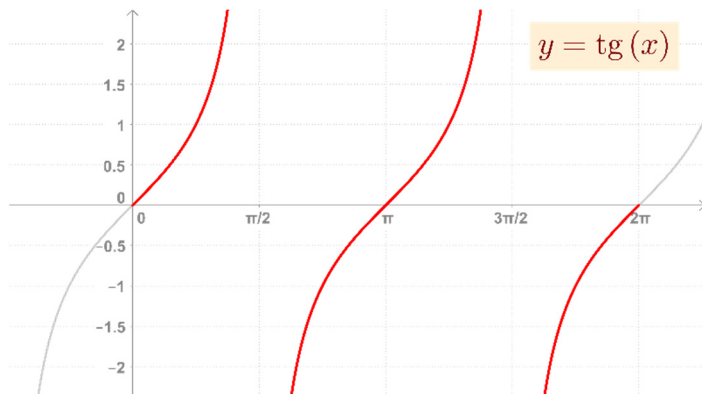
- Es **periódica**, de periodo  $2\pi$ :  $\text{sen}(x + 2\pi k) = \text{sen } x; \forall k \in \mathbb{Z}$
- Domínio:** todos los números reales,  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$
- Recorrido:**  $\text{Im } f = [-1, 1]$ , luego está acotada
- Es una función **impar**:  $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$
- Simetría: respecto al origen
- Asíntotas verticales: ninguna
- Máximo:  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ ; mínimo:  $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$
- Intersección con eje X:  $x = \{\pi k\}; \forall k \in \mathbb{Z}$
- Es **continua** en  $\mathbb{R}$ , ya que lo es en el intervalo  $[0, 2\pi]$
- Creciente:  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \dots$ ; Decreciente:  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \dots$
- Para todo valor, excepto 1 y -1, hay dos ángulos que tienen por seno dicho valor: p.ej.  
Si  $\text{sen } x = \frac{1}{2}$  entonces  $x = \frac{\pi}{6}$  ó  $x = \frac{5\pi}{6}$

## Función coseno



- Es **periódica**, de periodo  $2\pi$ :  $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$ ;  $\forall k \in \mathbb{Z}$
- **Dominio**: todos los números reales,  $Dom f = \mathbb{R}$
- **Recorrido**:  $Im f = [-1, 1]$ , luego está acotada
- Es una función **par**:  $\cos(-x) = \cos x$
- Simetría: respecto al eje Y
- Asíntotas verticales: ninguna
- Máximo:  $(0, 1)$  y  $(2\pi, 1)$ ; mínimo:  $(\pi, -1)$
- Intersección con eje X:  $x = \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \right\}$ ;  $\forall k \in \mathbb{Z}$
- Es **continua** en  $\mathbb{R}$ , ya que lo es en el intervalo  $[0, 2\pi]$
- Creciente:  $(\pi, 2\pi) \dots$ ; Decreciente:  $(0, \pi) \dots$
- Para todo valor, excepto 1 y -1, hay dos ángulos que tienen por coseno dicho valor: *p.ej.*  
Si  $\cos x = \frac{1}{2}$  entonces  $x = \frac{\pi}{3}$  ó  $x = \frac{5\pi}{3}$

## Función tangente



- Es **periódica**, de periodo  $\pi$ :  $\text{tg}(x + \pi k) = \text{tg } x$ ;  $\forall k \in \mathbb{Z}$
- Dado que la función tangente es  $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$  su **dominio** es  $Dom f = \mathbb{R} - \left\{ x : x = \frac{\pi}{2} + \pi k \right\}$ ;  $\forall k \in \mathbb{Z}$
- **Recorrido**:  $Im f = \mathbb{R}$ , luego no está acotada
- Es una función **impar**:  $\text{tg } x(-x) = -\text{tg } x$
- Simetría: respecto al origen
- Asíntotas verticales:  $x = \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \right\}$ ;  $\forall k \in \mathbb{Z}$
- Intersección con eje X:  $x = \{ \pi k \}$ ;  $\forall k \in \mathbb{Z}$
- Es **continua** para todo valor de  $x$  donde no se anula el denominador.
- Es creciente en su dominio.

I cuadrante

II cuadrante

III cuadrante

IV cuadrante

| x     | 0°<br>360° | 30°                  | 45°                  | 60°                  | 90°             | 120°                 | 135°                  | 150°                  | 180°  | 210°                  | 225°                  | 240°                  | 270°             | 300°                  | 315°                  | 330°                  |
|-------|------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
|       | 0          | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$     | $\frac{3\pi}{4}$      | $\frac{5\pi}{6}$      | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$      | $\frac{5\pi}{4}$      | $\frac{4\pi}{3}$      | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$      | $\frac{7\pi}{4}$      | $\frac{11\pi}{6}$     |
| sen x | 0          | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{1}{2}$         | 0     | $-\frac{1}{2}$        | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1               | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$        |
| cos x | 1          | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               | $-\frac{1}{2}$       | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1    | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$        | 0                | $\frac{1}{2}$         | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  |
| tg x  | 0          | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | -               | $-\sqrt{3}$          | -1                    | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0     | $\frac{\sqrt{3}}{3}$  | 1                     | $\sqrt{3}$            | -                | $-\sqrt{3}$           | -1                    | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

Relación fundamental en trigonometría:  $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$

Las seis funciones trigonométricas son periódicas. Coseno y secante son pares, el resto son impares.

Si restringimos el dominio a un subdominio conveniente podemos hacer que todas sean inyectivas. Si además queremos que sean continuas, se ha de elegir un subdominio de modo que en él sean estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes. Por ser las funciones trigonométricas periódicas es evidente que existen infinitos intervalos en los que pueden definirse las funciones inversas (o recíprocas) conocidas como funciones *arco*; elegido uno, los demás se obtienen por periodicidad. Por ej.  $y = \text{arc sen } x \Leftrightarrow \text{sen } y = x$

Notaciones en la calculadora:

$\text{sen}^{-1}(0.5) = 30^\circ \rightarrow \text{arc sen}(0.5) = 30^\circ$ ; No hay teclas para calcular directamente sec, cosec y cotg, es necesario hacer el cociente

$\text{sen}^2 \alpha = (\text{sen } \alpha)^2$  pero no es  $\text{sen } \alpha^2$ ; Otra notación:  $\text{tg } \alpha = \tan \alpha$ ;  $\text{cotg } \alpha = \cot \alpha$ ;  $\text{cosec } \alpha = \csc \alpha$