

TRIGONOMETRÍA

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Resolver un triángulo consiste en determinar la longitud de sus tres lados y la amplitud de sus tres ángulos. Cuando conocemos tres de ellos, con tal que uno sea un lado, la trigonometría enseña a solucionar el triángulo.

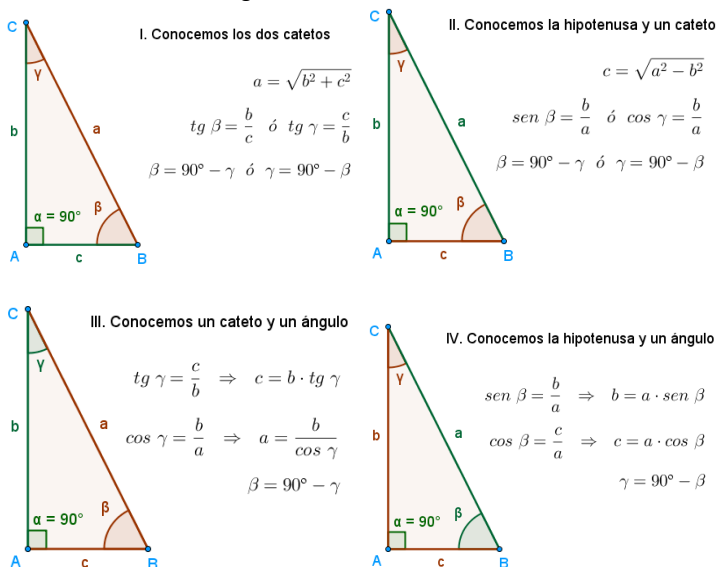
Recordemos que:

- ✓ En todo triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
- ✓ Si un triángulo tiene dos lados iguales, sus ángulos opuestos son también iguales.
- ✓ En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo.
- ✓ Relación angular: los tres ángulos de un triángulo suman 180°

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto; luego en este caso, se puede resolver cuando se conocen dos de sus elementos, siempre que uno sea un lado.

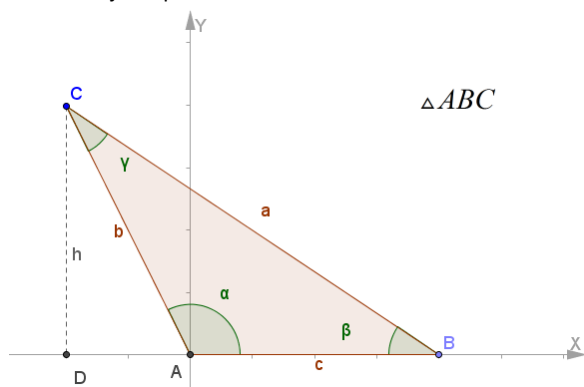
En su resolución distinguimos cuatro casos:



OBSERVACIÓN: es conveniente utilizar siempre los datos conocidos

TRIÁNGULOS OBLICUOS

Un triángulo oblicuo es aquel que no contiene ángulo recto. Vamos a usar la siguiente notación para nombrar los distintos elementos del triángulo, colocando el ángulo α en posición estándar, de modo que B se localice en el eje x positivo.



Aunque α sea agudo seguiremos el mismo procedimiento.

Teorema de los senos

En cualquier triángulo, la razón entre el seno de un ángulo y el lado opuesto a ese ángulo es igual a la razón entre otro ángulo y el lado opuesto a ese ángulo.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$$

APLICACIÓN:

- Si conocemos dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos (LLA)
- Si conocemos dos ángulos y cualquier lado (AAL) o (ALA)

Teorema del coseno

El cuadrado de la longitud de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de las longitudes de los mismos lados por el coseno del ángulo formado por ellos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{cos} \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \operatorname{cos} \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{cos} \gamma$$

APLICACIÓN:

- Si conocemos dos lados y el ángulo entre ellos (LAL)
- Si conocemos tres lados (LLL)

OBSERVACIONES:

- Dados dos lados y el ángulo entre ellos (LAL) podemos usar el teorema del coseno para hallar el tercer lado, después utilizaremos el teorema de los senos para calcular otro ángulo del triángulo. Siempre que sigamos este procedimiento, **es mejor hallar el ángulo opuesto al lado más corto**, ya que siempre es agudo; de este modo evitamos obtener dos soluciones.
- Dados tres lados de un triángulo (LLL), podemos utilizar el teorema del coseno para hallar cualquiera de los tres ángulos. **Siempre hallaremos primero el ángulo más grande**; es decir, el ángulo opuesto al lado más largo, ya que así garantizamos que los ángulos restantes sean agudos. De este modo podremos utilizar el teorema de los senos para encontrar otro ángulo. Si utilizamos el teorema del coseno no hay caso ambiguo.

Área de un Triángulo

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la base por su altura.

$$A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

FÓRMULA DE HERÓN: conociendo la longitud de los tres lados de un triángulo cualquiera y sabiendo que s es el semiperímetro, el área del triángulo es:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad ; \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de las longitudes de dos lados cualesquiera por el seno del ángulo formado entre ellos.

$$A = \frac{ab \operatorname{sen} \gamma}{2} = \frac{ac \operatorname{sen} \beta}{2} = \frac{bc \operatorname{sen} \alpha}{2}$$

Altura relativa al lado "a" (del mismo modo para "b" y "c")

$$h_a = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$