

Repartos proporcionales

Procedimiento de cálculo que permite distribuir cierta cantidad, en partes proporcionales a otras.

Dependiendo de la relación que exista entre la cantidad a repartir, y las partes proporcionales, distinguimos dos tipos:

- Reparto proporcional simple directo.
- Reparto proporcional simple inverso.

Repartir una cantidad C en varias partes: x_1, x_2, \dots, x_n que son proporcionales a los números: a_1, a_2, \dots, a_n

Donde los a_i se denominan *números proporcionales* y los x_i son las distintas *cantidades buscadas*, correspondientes respectivamente a cada número proporcional dado.

REPARTO PROPORCIONAL DIRECTO

En un reparto directo, *cuanto mayor es el número proporcional, más le corresponde en el reparto y viceversa.*

MÉTODO I, DE LAS PROPORCIONES

Para un reparto de una cantidad C en tres partes x_1, x_2, x_3 **directamente proporcionales** a tres números a_1, a_2, a_3 , y aplicando la **propiedad de las proporciones** que dice que: *en una serie de razones iguales, cada antecedente es a su consecuente como la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes*, tenemos:

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{a_1 + a_2 + a_3}$$

Si llamamos: $C = x_1 + x_2 + x_3$ y $S = a_1 + a_2 + a_3$

El reparto queda como se indica:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{a_1} &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{a_1 + a_2 + a_3} \Rightarrow x_1 = \frac{a_1 \cdot C}{S} \\ \frac{x_2}{a_2} &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{a_1 + a_2 + a_3} \Rightarrow x_2 = \frac{a_2 \cdot C}{S} \\ \frac{x_3}{a_3} &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{a_1 + a_2 + a_3} \Rightarrow x_3 = \frac{a_3 \cdot C}{S} \end{aligned}$$

MÉTODO II, DE REDUCCIÓN A LA UNIDAD

Para un reparto de una cantidad C en tres partes x_1, x_2, x_3 **directamente proporcionales** a tres números a_1, a_2, a_3 , y calculando la **constante k de proporcionalidad**, tenemos:

- Cantidad a repartir: $C = x_1 + x_2 + x_3$
- Suma de los números proporcionales: $S = a_1 + a_2 + a_3$
- Constante de proporcionalidad: $k = \frac{C}{S}$
- Y el reparto queda así:
$$\begin{cases} x_1 = a_1 \cdot k \\ x_2 = a_2 \cdot k \\ x_3 = a_3 \cdot k \end{cases}$$
- Comprobamos que: $x_1 + x_2 + x_3 = C$

REPARTO PROPORCIONAL INVERSO

En un reparto inverso, *cuanto mayor es el número proporcional, menos le corresponde en el reparto y viceversa.*

MÉTODO I, DE LAS PROPORCIONES

Para un reparto de una cantidad C en tres partes x_1, x_2, x_3 **inversamente proporcionales** a tres números a_1, a_2, a_3 , y aplicando la **propiedad de las proporciones** que dice que: *en una serie de razones iguales, cada antecedente es a su consecuente como la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes*, tenemos:

$$\frac{x_1}{\frac{1}{a_1}} = \frac{x_2}{\frac{1}{a_2}} = \frac{x_3}{\frac{1}{a_3}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}}$$

Si llamamos: $C = x_1 + x_2 + x_3$ y $S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}$

Queda el reparto como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{\frac{1}{a_1}} &= \frac{C}{S} \Rightarrow x_1 = \frac{C}{a_1 \cdot S} \\ \frac{x_2}{\frac{1}{a_2}} &= \frac{C}{S} \Rightarrow x_2 = \frac{C}{a_2 \cdot S} \\ \frac{x_3}{\frac{1}{a_3}} &= \frac{C}{S} \Rightarrow x_3 = \frac{C}{a_3 \cdot S} \end{aligned}$$

Comprobando que $x_1 + x_2 + x_3 = C$

MÉTODO II, DE REDUCCIÓN A LA UNIDAD

Para un reparto de una cantidad C en tres partes x_1, x_2, x_3 **inversamente proporcionales** a tres números a_1, a_2, a_3 , y calculando la **constante de proporcionalidad**, tenemos:

- Cantidad a repartir: $C = x_1 + x_2 + x_3$
- Números proporcionales: a_1, a_2, a_3
- Inversos de los números proporcionales: $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}$
- Reducimos a común denominador las tres fracciones

$$\frac{b_1}{M}, \frac{b_2}{M}, \frac{b_3}{M}$$

siendo M el $mcm(a_1, a_2, a_3)$

- Suma de los numeradores: $S = b_1 + b_2 + b_3$
- Constante de proporcionalidad: $k = \frac{C}{S}$
- Y el reparto, utilizando los numeradores, queda así:
$$\begin{cases} x_1 = b_1 \cdot k \\ x_2 = b_2 \cdot k \\ x_3 = b_3 \cdot k \end{cases}$$
- Comprobamos que: $x_1 + x_2 + x_3 = C$

Problema 1

Repartir la cantidad de 1.000 €, en tres partes que sean directamente proporcionales a los números 2, 3, y 5.

Cantidad a repartir: $C = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow C = 1000$

Suma de los números directamente proporcionales:

$$S = 2 + 3 + 5 \rightarrow S = 10$$

Constante de proporcionalidad: $k = \frac{C}{S} = \frac{1000}{10} \rightarrow k = 100$

Reparto:

$$x_1 = 2 \cdot k \rightarrow 2 \cdot 100 \rightarrow x_1 = 200 \text{ €}$$

$$x_2 = 3 \cdot k \rightarrow 3 \cdot 100 \rightarrow x_2 = 300 \text{ €}$$

$$x_3 = 5 \cdot k \rightarrow 5 \cdot 100 \rightarrow x_3 = 500 \text{ €}$$

Y comprobamos que: $200 \text{ €} + 300 \text{ €} + 500 \text{ €} = 1000 \text{ €}$

Problema 2

Repartir la cantidad de 720 € en 3 partes, que sean inversamente proporcionales a los números: 3, 4, y 6.

Cantidad a repartir:

$$C = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow C = 720$$

Números proporcionales inversos y reducción a común denominador:

$$\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6} \xrightarrow{\text{mcm}(3,4,6)=12} \frac{4}{12}; \frac{3}{12}; \frac{2}{12}$$

Suma de los numeradores:

$$S = 4 + 3 + 2 \rightarrow S = 9$$

Constante de proporcionalidad: $k = \frac{C}{S} = \frac{720}{9} \rightarrow k = 80$

Reparto:

$$x_1 = 4 \cdot k \rightarrow 4 \cdot 80 \rightarrow x_1 = 320 \text{ €}$$

$$x_2 = 3 \cdot k \rightarrow 3 \cdot 80 \rightarrow x_2 = 240 \text{ €}$$

$$x_3 = 2 \cdot k \rightarrow 2 \cdot 80 \rightarrow x_3 = 160 \text{ €}$$

Y comprobamos que: $320 \text{ €} + 240 \text{ €} + 160 \text{ €} = 720 \text{ €}$

Problema 3

Tres amigos invierten en un negocio las siguientes cantidades:

Juan deposita 6.000 €, Luis 4.500 € y Pedro 9.500 €.

Si en el primer año han tenido un beneficio de 2.000 €.

¿Qué beneficio corresponde a cada uno?

Cuanta más cantidad invertida, más beneficio tienes; luego se trata de un reparto directamente proporcional.

Cantidad a repartir: $C = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow C = 2000$

Suma de los números directamente proporcionales:

$$S = 6000 + 4500 + 9500 \rightarrow S = 20000$$

Constante de proporcionalidad: $k = \frac{C}{S} = \frac{2000}{20000} \rightarrow k = \frac{1}{10}$

Reparto:

$$x_1 = 6000 \cdot k \rightarrow x_1 = 600 \text{ €}$$

$$x_2 = 4500 \cdot k \rightarrow x_2 = 450 \text{ €}$$

$$x_3 = 9500 \cdot k \rightarrow x_3 = 950 \text{ €}$$

Y comprobamos que: $600 \text{ €} + 450 \text{ €} + 950 \text{ €} = 2.000 \text{ €}$

Problema 4

Tres familias alquilan conjuntamente un apartamento en la costa por 1.200 € para 20 días. Los Rodríguez lo disfrutaron durante la primera semana; los García, los 8 días siguientes y, el resto del tiempo, los Ochoa. ¿Cuánto debe pagar cada familia por la estancia?

Cuanto más días se disfruta del apartamento, más debe pagar la familia; luego será un reparto directamente proporcional.

Cantidad a repartir: $C = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow C = 1200$

Suma de los números directamente proporcionales:

$$S = 7 + 8 + 5 \rightarrow S = 20$$

Constante de proporcionalidad: $k = \frac{C}{S} = \frac{1200}{20} \rightarrow k = 60$

Reparto:

$$x_1 = 7 \cdot k \rightarrow 7 \cdot 60 \rightarrow x_1 = 420 \text{ €}$$

$$x_2 = 8 \cdot k \rightarrow 8 \cdot 60 \rightarrow x_2 = 480 \text{ €}$$

$$x_3 = 5 \cdot k \rightarrow 5 \cdot 60 \rightarrow x_3 = 300 \text{ €}$$

Y comprobamos que: $420 \text{ €} + 480 \text{ €} + 300 \text{ €} = 1.200 \text{ €}$

Problema 5

En una carrera de motos el primer clasificado ha tardado tres cuartos de hora, el segundo 3 minutos más que el primero y el tercero 2 minutos más que el segundo.

Si el premio de 9.080 €, ¿cómo debemos repartir el dinero entre los tres clasificados?

Cuanto menos tiempo tarde más dinero ganará, luego se trata de un reparto inversamente proporcional.

Cantidad a repartir:

$$C = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow C = 9080$$

Números proporcionales inversos:

$$\frac{1}{45}; \frac{1}{48}; \frac{1}{50}$$

Reducción a común denominador

$$\xrightarrow{\text{mcm}(45,48,50)} \xrightarrow{\text{mcm}=3600} \frac{80}{3600}; \frac{75}{3600}; \frac{72}{3600}$$

Suma de los numeradores:

$$S = 80 + 75 + 72 \rightarrow S = 227$$

Constante de proporcionalidad: $k = \frac{C}{S} = \frac{9080}{227} \rightarrow k = 40$

Reparto:

$$x_1 = 80 \cdot k \rightarrow 80 \cdot 40 \rightarrow x_1 = 3200 \text{ €}$$

$$x_2 = 75 \cdot k \rightarrow 75 \cdot 40 \rightarrow x_2 = 3000 \text{ €}$$

$$x_3 = 72 \cdot k \rightarrow 72 \cdot 40 \rightarrow x_3 = 2880 \text{ €}$$

Y comprobamos que: $3200 \text{ €} + 3000 \text{ €} + 2880 \text{ €} = 9.080 \text{ €}$