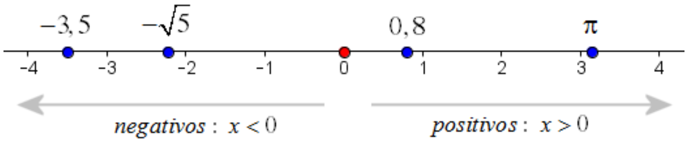
DESIGUALDADES

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es la unión de los conjuntos de números racionales e irracionales. Su representación gráfica sobre una recta da lugar a la recta real.

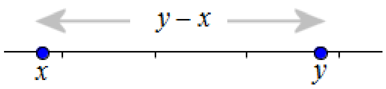
Podemos identificar los números reales con los puntos de una recta del siguiente modo:

Dada una recta (por conveniencia horizontal) y una unidad de medida arbitraria, fijamos un punto de la recta que identificamos con el número cero. Luego, cada número real x se empareja con el punto que está situado a x unidades a la derecha de 0 si es positivo ($x > 0$) y con el punto situado a $-x$ unidades a la izquierda de 0 si es negativo ($x < 0$)



Esta correspondencia ente los números reales y los puntos de la recta es biunívoca, es decir, a cada número real le corresponde un único punto y a cada punto le corresponde un único número real. Por esta razón, frecuentemente llamaremos "*puntos*" a los números reales. Tampoco debemos olvidar que entre cada dos números reales distintos hay infinitos números racionales e infinitos números irracionales.

Teniendo en cuenta esta identificación, si x e y son dos números tales que $x < y$, entonces x está a la izquierda de y, a una distancia de $y - x$ unidades.



Las expresiones que contienen los signos $<, \leq, >, \geq$ reciben el nombre de **desigualdad**.

ORDEN EN LA RECTA REAL

En $\mathbb{R}$ existe un subconjunto de números simbolizado por $\mathbb{R}^+$, llamado **reales positivos**, que satisface estas condiciones:

I. Cada $a \in \mathbb{R}$ satisface una y sólo una de estas condiciones
$$a \in \mathbb{R}^+ \quad ; \quad -a \in \mathbb{R}^+ \quad ; \quad a = 0$$

II. $Si\ a \in \mathbb{R}^+ \ y \ b \in \mathbb{R}^+ \ entonces \ a + b \in \mathbb{R}^+ \ y \ ab \in \mathbb{R}^+$

Dados dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$ se dice que a ***es menor que*** b, escrito $a < b$, si $b - a$ es positivo
$$a < b \iff (b - a) \in \mathbb{R}^+$$
Si $a < b$, también se escribe $b > a$, y se lee "*b **es mayor que** a*"

Se dice que a ***es menor o igual que*** b, y se escribe $a \leq b$, si y solo sí $a < b \ \text{ó} \ a = b$. En este caso, también se dice que b **es mayor o igual que** a y se escribe $b \geq a$

Es decir, sobre $\mathbb{R}$ se hallan definidas dos relaciones de orden recíprocas: $\leq$ $(menor \ o \ igual)$ y $\geq$ $(mayor \ o \ igual)$.

PROPIEDADES

I. Dados dos números reales a y b, se verifica una y solo una de las siguientes condiciones:
$$\text{ó} \quad a > b \quad \text{ó} \quad a = b \quad \text{ó} \quad a < b$$

II. Recordando que "$x > 0$" equivale a "$x\ es\ positivo$" y que "$x < 0$" equivale a "$x\ es\ negativo$", tenemos:
$$a \leq b \iff a - b \leq 0 \iff b - a \geq 0$$
$$a \geq b \iff a - b \geq 0 \iff b - a \leq 0$$
$$a < b \iff a - b < 0 \iff b - a > 0$$
$$a > b \iff a - b > 0 \iff b - a < 0$$

III. Al sumar miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido:
$$Si\ a < b\ y\ c < d \Rightarrow a + c < b + d$$

IV. Multiplicando por un mismo número **positivo** los dos miembros de una desigualdad, se obtiene otra desigualdad **del mismo sentido**:
$$Si\ a < b\ y\ c > 0 \Rightarrow ac < bc$$

V. Multiplicando por un mismo número **negativo** los dos miembros de una desigualdad, se obtiene una desigualdad **de sentido contrario**:
$$Si\ a < b\ y\ c < 0 \Rightarrow ac > bc$$

VI. Por la propiedad transitiva
$$Si\ a < b\ y\ b < c \Rightarrow a < c$$

VII. Para el cociente tenemos que
$$Si\ \ 0 < a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1} > 0.\ Si\ \ b < a < 0 \Rightarrow a^{-1} < b^{-1}$$

VIII. Si consideramos que $a\ y\ a^{-1}$ tienen el mismo signo
$$Si\ a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0.\ Si\ a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0$$

IX. Y, como ya conocemos de la regla de los signos
$$ab > 0 \iff (a > 0\ y\ b > 0)\ ó\ (a < 0\ y\ b < 0)$$
$$ab < 0 \iff (a > 0\ y\ b < 0)\ ó\ (a < 0\ y\ b > 0)$$

<u>Consideraciones</u>

- Las relaciones numéricas que se expresan con estos signos $<\ y >\ ó\ \leq y \geq$ se llaman **desigualdades** y las relaciones algebraicas correspondientes se llaman **inecuaciones**.
- Lo mismo que ocurre con las igualdades, las desigualdades pueden ser *ciertas* o *falsas*
- Los signos $>\ y <\ ó\ \geq y \leq$ son de sentido contrario.
- Una desigualdad es doble cuando aparecen dos signos de desigualdad en la misma expresión

VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número real a, representado por $|a|$, es dicho número cuando éste es mayor o igual que cero, y su opuesto cuando es negativo. Es decir:
$$|a| = \begin{cases} +a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

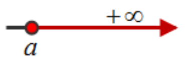
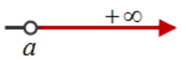
<u>Propiedades</u>

$$\textbf{1)}\ \ Si\ a > 0 \Rightarrow |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$
$$\textbf{2)}\ \ |x| \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}.\ Además,\ |x| = 0 \iff x = 0$$
$$\textbf{3)}\ \ |x| \cdot |y| = |xy| \ \ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$$
$$\textbf{4)}\ \ |x + y| \leq |x| + |y| \ \ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$$

INTERVALOS

Los intervalos son conjuntos de números reales formados por todos aquellos números que están comprendidos entre dos dados, llamados extremos del intervalo. Son subconjuntos del conjunto de los números reales.

En lo que sigue sobre los distintos tipos de intervalos (el punto "lleno" indica que pertenece al conjunto y el punto "vacío" o "hueco" que no pertenece al conjunto).

Se llama...	***Y se simboliza...***	***Al conjunto ...***	***Que gráficamente se representa...***
Intervalo abierto de extremos a y b	(a,b)	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	
Intervalo cerrado de extremos a y b	$[a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a \le x \le b\}$	
Intervalo semiabierto por la derecha	$[a,b)$	$\{x \in \mathbb{R} / a \le x < b\}$	
Intervalo semiabierto por la izquierda	$(a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \le b\}$	
Semirrecta cerrada de origen a	$[a,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / x \ge a\}$	
Semirrecta cerrada de final a	$(-\infty,a]$	$\{x \in \mathbb{R} / x \le a\}$	
Semirrecta abierta de origen a	$(a,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	
Semirrecta abierta de final a	$(-\infty,a)$	$\{x \in \mathbb{R} / x < a\}$	
Toda la recta real	$(-\infty,+\infty)$	$\mathbb{R}$	
Conjunto vacío		$\{\varnothing\}$	

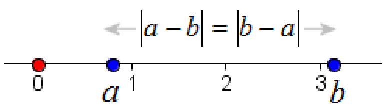
Para recordar: $\bullet \approx [\ ] \approx \le,\ge$ y $\circ \approx (\ ) \approx <,>$

DISTANCIA

Si a a y b b son dos números reales, se llama distancia de a a b al valor absoluto de su diferencia $a-b$, y se denota por $d(a,b)$

$$d(a,b) = |a-b|$$

Es evidente que la distancia siempre es un número positivo o nulo (caso a = b) y además $d(a,b) = |a-b| = |b-a| = d(b,a)$



La distancia de un número al origen (cero) es su valor absoluto

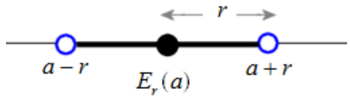
$$d(a,0) = |a|$$

ENTORNO

Si a es un punto de la recta real (un número real arbitrario) y r un número real positivo, se llama entorno de centro a y radio r al conjunto de puntos cuya distancia a a es menor que r

$$E_r(a) = \{x \in \mathbb{R} / d(x,a) < r\} = \{x \in \mathbb{R} / |x-a| < r\}$$

$$\textit{es decir, el intervalo abierto}: \ E_r(a) = (a-r, a+r)$$



Si del entorno $E_r(a)$ excluimos el punto a, el conjunto que resulta se denomina <u>*entorno reducido*</u> de centro a y radio r y se simboliza así: $E_r^*(a)$

$$E_r^*(a) = E_r(a) - \{a\}$$

Si consideremos sólo la parte derecha o izquierda tenemos

- <u>*Entorno lateral izquierdo*</u>: $E_r^-(a) = (a-r, a]$
- <u>*Entorno lateral derecho*</u>: $E_r^+(a) = [a, a+r)$

INECUACIONES

Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones en las que aparecen una o varias incógnitas, es decir, una inecuación es una desigualdad algebraica.

EJEMPLO 1:

a) $10x < 5$ es una inecuación con una incógnita
b) $x^2 + 4x \le y - 3$ es una inecuación con dos incógnitas

Una <u>*solución*</u> de una inecuación es cualquier valor numérico de cada una de las incógnitas que hace **cierta** la desigualdad. Al subconjunto *S* cuyos elementos son soluciones de la inecuación dada se llama *conjunto solución*.

<u>*Resolver*</u> una inecuación es calcular el conjunto solución, formado por todas sus soluciones que, en general, son infinitas (las soluciones de las inecuaciones son intervalos).

Podemos utilizar varios métodos para resolver inecuaciones y resultará más sencillo emplear uno antes que otro dependiendo de la inecuación propuesta.

- <u>*Por tanteo*</u>: tomando valores de cada uno de los intervalos definidos por los puntos críticos y comprobando si se verifica la inecuación dada.
- <u>*Por tabla de signos*</u>: factorizamos y estudiamos el signo de cada factor "para los positivos", seguidamente utilizamos la "regla de los signos" de la multiplicación para averiguar el signo de la expresión y seleccionamos los intervalos que verifican la inecuación propuesta.

Dos inecuaciones son <u>*equivalentes*</u> si tienen el mismo dominio de la incógnita y el mismo conjunto solución.

Algunos tipos de inecuaciones frecuentes son:

- Inecuaciones con una incógnita:
  - Polinómicas (de 1º grado, de 2º grado, etc…)
  - Racionales
  - Dobles
  - Modulares o de Valor absoluto
  - Con radicales, logaritmos, exponenciales,…
- Inecuaciones con más de una incógnita
- Sistemas de inecuaciones con una o más incógnitas
  - Lineales
  - No lineales