

# DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE POLINOMIOS

Factorizar un polinomio es descomponerlo en un producto de polinomios (factores) del menor grado posible.

$$P(x) = k \cdot (\dots) \cdot (\dots) \cdot (\dots) ; k \neq 0 \text{ y } k \in \mathbb{R}$$

Estos factores pueden ser de dos tipos:

- Expresiones del tipo:  $x, (ax \pm b)$
- Expresiones del tipo:  $(ax^2 + bx + c)$ , sin raíces reales.

$$\frac{P(x)}{R(x)} = \frac{Q(x)}{C(x)} ; P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x) \rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Si  $R(x) = 0$  (DIVISIÓN EXACTA) entonces  $P(x)$  es **múltiplo** de  $Q(x)$ , es decir,  $P(x)$  es **divisible** por  $Q(x)$  y, en tal caso, decimos que  $Q(x)$  es **divisor** de  $P(x)$ . Pudiendo escribir:  $P(x) = Q(x) \cdot C(x)$

## POLINOMIOS PRIMOS (IRREDUCIBLES)

- Un polinomio es primo (irreducible) cuando solo admite coeficientes constantes.  
 Todo polinomio de primer grado y coeficientes primos entre sí (tienen como único divisor la unidad) es primo (irreducible).  
 Una sola variable, sin coeficientes, también es un polinomio primo.  
 Un polinomio es primo (irreducible) si no tiene ningún divisor de grado menor al suyo. *p. ej.*  $(x^2 + 1)$ ;  $(x^4 + x^3 + 1)$ ; ...
- Todo polinomio real de grado impar tiene al menos una raíz real (TEOREMA DE BOLZANO).
- Los polinomios irreducibles reales son exactamente los de grado uno y aquellos de grado dos con discriminante negativo.
- Factorizar un polinomio es expresarlo como producto de polinomios irreducibles (primos).
- Un polinomio está factorizado completamente si cada factor obtenido no admite más descomposición (es primo).

## VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

El valor numérico de un polinomio,  $P(x)$ , para  $x = a$ , es el número que se obtiene al sustituir la  $x$  por  $a$  y efectuar las operaciones indicadas, escribiéndose  $P(a)$ .

*Ejemplo:*  $P(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ ; para  $x = -4$   
 $P(-4) = (-4)^4 + 3(-4)^3 - 3(-4)^2 + 3(-4) - 4 = \boxed{0}$

## TEOREMA DEL RESTO

El valor numérico de un polinomio,  $P(x)$ , para  $x = a$ , coincide con el resto de la división  $P(x) : (x - a)$ . Es decir  $P(a) = r$ .  
*(Luego no es necesario realizar la división completa para saber su resto).*

*Ejemplo:*  $(x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 4) : (x - 2)$

+2	+1	+3	-3	+3	-4
		+2	+10	+14	+34
	+1	+5	+7	17	30

$P(2) = 2^4 + 3 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 4$   
 $P(2) = 16 + 24 - 12 + 6 - 4 = \boxed{30}$

## TEOREMA DEL FACTOR

Si el polinomio  $P(x)$  se anula para  $x = a$ , es decir,  $P(a) = 0$ , entonces  $(x - a)$  es un **DIVISOR** de  $P(x)$ , luego **EXISTE** un polinomio  $h(x)$  que verifica:  $P(x) = h(x) \cdot (x - a) \Leftrightarrow P(a) = 0$

## RAÍCES O CEROS DE UN POLINOMIO

Las **raíces** o **ceros** de un polinomio son los valores que anulan el polinomio. Es decir, un número  $a$  se llama **raíz** o **cero** de un polinomio  $P(x)$  si éste se anula al sustituir  $x$  por  $a$ :  $P(a) = 0$ .  
 Las raíces de  $P(x)$  son las soluciones de la ecuación  $P(x) = 0$ .

*Resumiendo:*

- Un polinomio  $P(x)$  es divisible por  $(x - a) \Leftrightarrow P(a) = 0$
- El valor  $a$  se denomina raíz o cero de  $P(x)$
- Si  $a$  es raíz de  $P(x)$ , entonces  $(x - a)$  es un **factor** de  $P(x)$

## CRITERIO DE DIVISIBILIDAD

Hemos visto que la condición necesaria y suficiente para que un polinomio sea divisible por  $(x - a)$  es que  $a$  sea una raíz o cero del polinomio:  $(x - a)$  es divisor de  $P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$

Cuando los coeficientes de un polinomio  $P(x)$  son números enteros, los ceros racionales, si existen, del polinomio se encuentran entre las fracciones que tienen como numerador un divisor del término independiente y como denominador un divisor del coeficiente del término de mayor grado.

## CONSECUENCIA:

Si el coeficiente de mayor grado es 1, para buscar las raíces enteras del polinomio  $P(x)$  **probaremos solo con los valores de  $a$  (positivos y negativos) que sean divisores del término independiente del polinomio.**

*Ejemplo*

Descomponer en factores el polinomio:  $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$

Los posibles ceros racionales se encuentran entre los números que tienen:

- Como numerador, los divisores de 2:  $\pm \frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{1}{2}; \frac{2}{2}$
- Como denominador, los divisores de 3:  $\pm 1; \pm 3$

Por tanto, probaremos con:  $\pm 1; \pm 2; \pm \frac{1}{3}; \pm \frac{2}{3}$

Seguidamente comprobamos que los ceros del polinomio propuesto son los números  $+1; -2$  y  $\frac{1}{3}$

$$3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = (x - 1)(x + 2)(3x - 1)$$

1/3	+3	+2	-7	+2
	+3	+3	-6	0
+1		+3	+6	
	+3	+6	0	

$\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)(3x + 6)$   
 $3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)(x + 2)$   
 $(x - 1)(x + 2)(3x - 1)$

Nota 1: Es evidente que podríamos haber probado primero con  $+1$  o  $-2$ , pero si lo hacemos con  $+1/3$  llegamos al mismo resultado.

Nota 2: Podemos utilizar el Teorema del Resto para encontrar las raíces o ceros del polinomio propuesto antes de utilizar Ruffini.

## DIVERSOS MÉTODOS PARA FACTORIZAR POLINOMIOS

1. Sacar Factor Común
2. Sacar Factor Común por Agrupamiento
3. Diferencia de cuadrados
4. Trinomio cuadrado perfecto
5. Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción
6. Trinomio de segundo grado
7. Binomios con un término común
8. Diferencia de cubos
9. Suma de cubos
10. Cuatrinomio cubo perfecto
11. Suma de potencias iguales impares
12. Diferencia de potencias iguales impares
13. Diferencia de potencias iguales pares
14. Identidades de Legendre
15. Desarrollo de un trinomio al cuadrado o al cubo
16. Sucesivas divisiones de Ruffini
17. Combinación de varios de los anteriores

Existe algunos métodos más, aunque en general, no suele ser fácil factorizar polinomios de grado mayor a dos que no se ajusten a los métodos anteriores.

Para hallar el **mínimo común múltiplo (mcm)** de varios polinomios, se descomponen en factores irreducibles. El **mcm** es el producto de los factores comunes y no comunes con mayor exponente.

Para hallar el **máximo común divisor** de varios polinomios, se descomponen en factores irreducibles. El **MCD** es el producto de los factores comunes con el menor exponente.

Podemos darnos cuenta que la factorización de un polinomio como producto de polinomios irreducibles es similar a la descomposición de un número en factores primos.

## EJEMPLOS DE DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE POLINOMIOS

### Ejemplo 1.- Sacar factor común

- $x^4 - 5ax^2 = x^2(x^2 - 5a)$
- $9x^2 - 3x = 3x(3x - 1)$
- $49x^2 - 21ax + 42x^3 = 7x(7x - 3a + 6x^2)$

### Ejemplo 2.- Sacar doble factor común

- $a^2 - ab + ax - bx = a(a - b) + x(a - b) = (a - b)(a + x)$
- $y^6 - y^4 + 2y^3 - 2y = y^4(y^2 - 1) + 2y(y^2 - 1) = y^4(y^2 - 1)(y^3 + 2)$
- $3mn + mp + 3rn + rp = m(3n + p) + r(3n + p) = (3n + p)(m + r)$

### Ejemplo 3.- Binomio al cuadrado

- $x^4 + 4x + 4 = (x^2 + 2)^2$
- $\frac{1}{4} - a + a^2 = \left(\frac{1}{2} - a\right)^2$
- $20 + 20x + 5x^2 = 5(4 + 4x + x^2) = 5(2 + x)^2$

### Ejemplo 4.- Diferencia de cuadrados

- $18 - 2b^2 = 2(9 - b^2) = 2(3 + b)(3 - b)$
- $16y^2 - x^4 = (4y + x^2)(4y - x^2)$
- $a^2 - (x - y)^2 = (a + x - y)(a - x + y)$

### Ejemplo 5.- Diferencia de cubos

- $125 - x^3 = (5 - x)(25 + x^2 + 5x)$
- $64a^3 - y^3 = (4a - y)(16a^2 + y^2 + 4ay)$
- $\frac{x^3}{8} - 27 = \left(\frac{x}{2} - 3\right)\left(\frac{x^2}{4} + 9 + \frac{3x}{2}\right)$

### Ejemplo 6.- Suma de cubos

- $x^3 + 8y^3 = (x + 2)(x^2 + 4 - 2x)$
- $512 + y^3 = (8 + y)(64 + y^2 - 8y)$
- $8x^3 + 27 = (2x + 3)(4x^2 + 9 - 6x)$

### Ejemplo 7.- Combinados

- $8 - 2a^2 + 4ab - 2b^2 = 2[4 - (a^2 - 2ab + b^2)] = 2(2 + a - b)(2 - a + b)$
- $24y^3 - 4y^2 + 6y - 1 = 6y(4y^2 + 1) - (4y^2 + 1) = (4y^2 + 1)(6y - 1)$
- $9x^2 - 6xy - z^2 + y^2 = (3x - y)^2 - z^2 = (3x - y + z)(3x - y - z)$
- $m^2 - n^2 - 2np - p^2 = m^2 - (n^2 + 2np + p^2) = (m + n + p)(m - n + p)$
- $1 - x^6 = (1 - x^3)(1 + x^3) = (1 - x)(1 + x^2 + x)(1 + x)(1 + x^2 - x)$
- $a^8 + 256 = a^8 + 2^8 \rightarrow$  no se puede descomponer
- $x^5 + 32 = (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$
- $x^5 - 32 = (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$

### Ejemplo 8.- Por ecuación de 2º grado

- $P(x) = 3x^2 + 5x - 2$   
 $3x^2 + 5x - 2 = 0$   
 $x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6}$   
 $x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6}$   
 $x_1 = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$   
 $x_2 = \frac{-5 - 7}{6} = -2$   
 $P(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2)$   
 $P(x) = (3x - 1)(x + 2)$

### Ejemplo 9.- Binomio con un término común

- $x^2 + 4x - 21 = (x + 7)(x - 3)$
- $x^2 - 13x + 40 = (x - 8)(x - 5)$
- $x^2 + 9x + 18 = (x + 6)(x + 3)$

### Ejemplo 10.- Por Ruffini sucesivamente

- $P(x) = x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 32x - 60$   

	+1	-8	+11	+32	-60
+2		+2	-12	-2	+60
	+1	-6	-1	+30	0
-2		-2	+16	-30	
	+1	-8	+15	0	
+3		+3	-15		
	+1	-5	0		

Posibles ceros:  
divisores de 60  
 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5,$   
 $\pm 6, \pm 10, \pm 12, \pm 15,$   
 $\pm 20, \pm 30, \pm 60$

$$P(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x - 5)$$

- $P(x) = x^4 + x^3 - 27x^2 - 25x + 50$   

	+1	+1	-27	-25	+50
+1		+1	+2	-25	-50
	+1	+2	-25	-50	0
-2		-2	0	+50	
	+1	0	-25	0	

Posibles ceros:  
divisores de 50  
 $\pm 1, \pm 2, \pm 5,$   
 $\pm 10, \pm 25, \pm 50$

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x^2 - 25)$$

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 5)(x - 5)$$